



數概念

《整數篇、加減篇》

分享者：永信國小劉易真

台南大學謝堅教授指導
台南市數學輔導團



數概念的
啟蒙

命名與
說讀聽
寫作

數的大
小與
量的
多少

多單位
概念


基本加
法事實

整數加
法算則

加法與
減法問
題

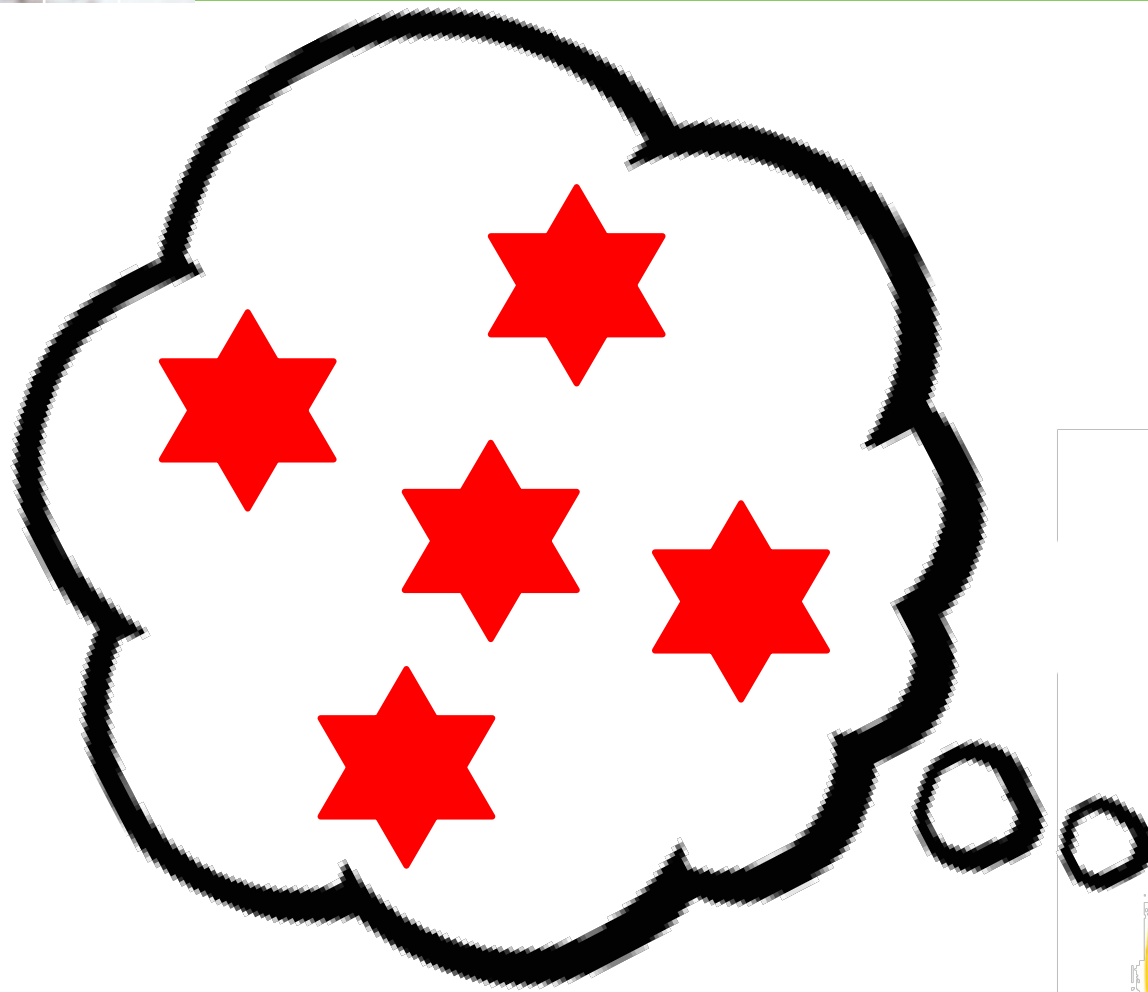
加減
互逆

數概念的啟蒙



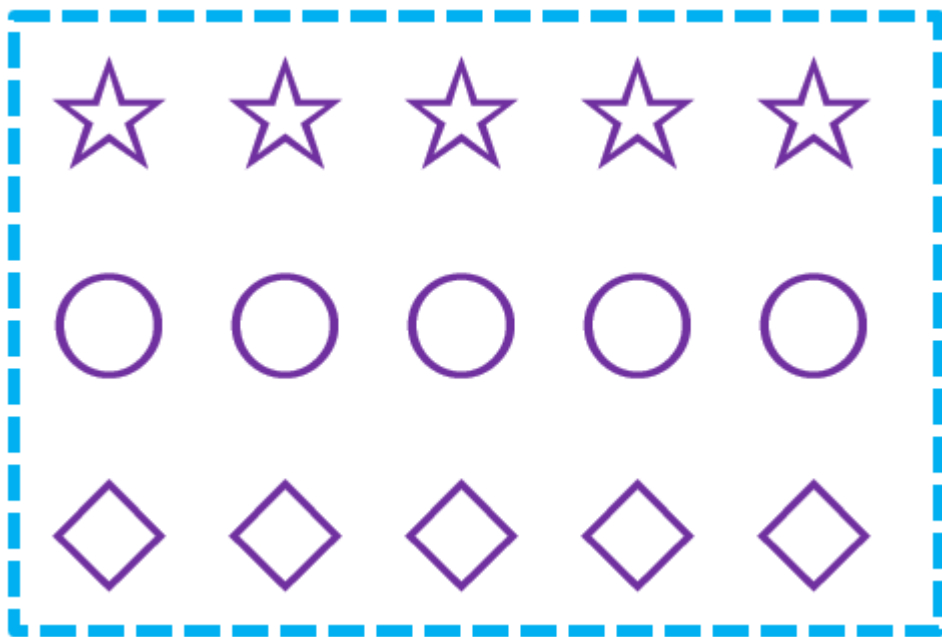
數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

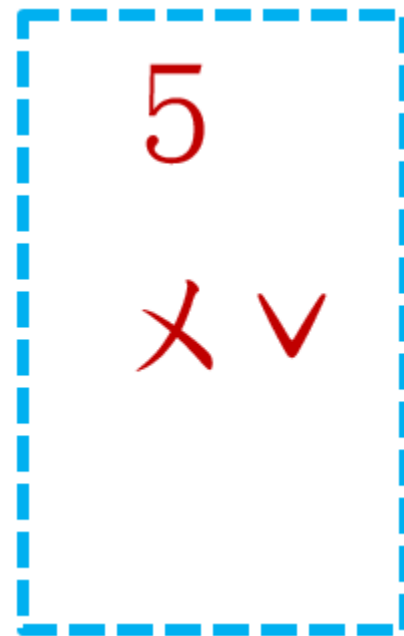


?

左、右這兩類表徵，何者較容易溝通個數？



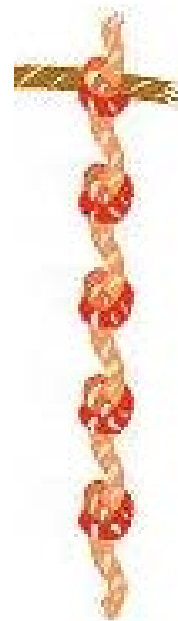
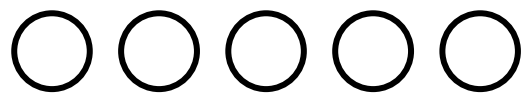
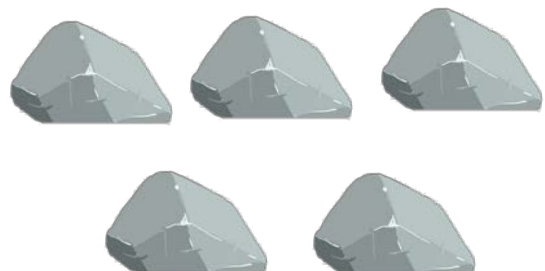
有一一對應的關係



看不到

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域



叭叭叭
叭叭

正

都可以代表由5個元素所構成集合的個數，因為它們都滿足一對一對應的關係。



哪一種聲音較容易溝通**數量關係**？

①相同的 5 個聲音（ㄅㄅㄅㄅㄅ）

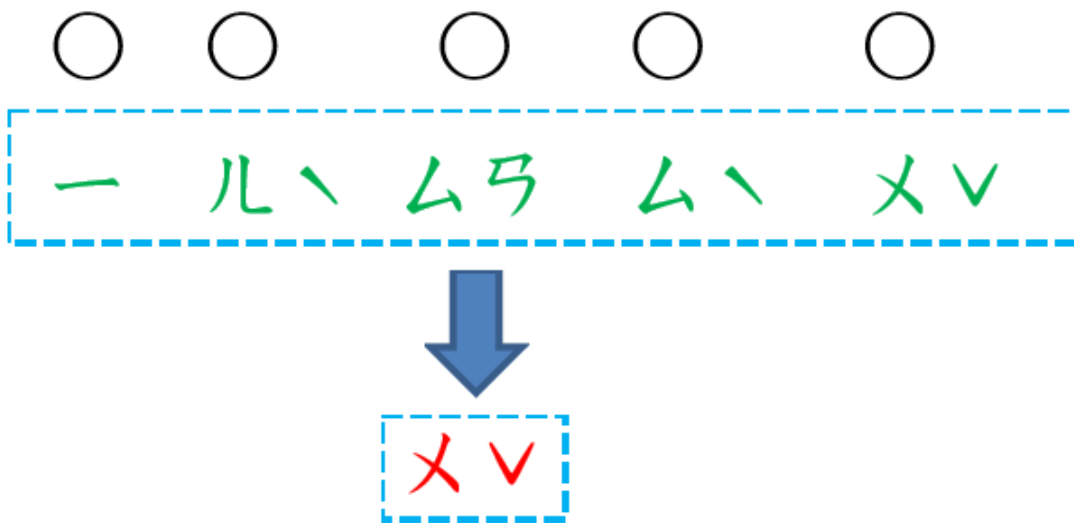


②不同的 5 個聲音（ㄅㄆㄇㄉㄅ）



?

哪一種聲音較容易溝通**數量關係**？



用最後一個聲音，代表唸過的 5 個聲音。



哪一種聲音較容易溝通**數量關係**？

①相同的 5 個聲音 (ㄅㄅㄅㄅㄅ)

②不同的 5 個聲音 (ㄅㄆㄇㄏㄏ)

一一對應

一 儿、 ㄇㄎ ㄇ、 ㄨㄨ

1 2 3 4 5



數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

學童無法理解其意義。

國小一年級課本教學重點是檢查，

如何檢查學童是否已掌握數數的意義？

第 5 個聲音 $\times \checkmark$

VS

合起來有 $\times \checkmark$ 個

序數

基數

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

拿 5 個蘋果給學生點數，當學生點數成功後，
詢問：5 個蘋果在哪裡？



如何檢驗

一 儿、ム弓 ム、 ヂV

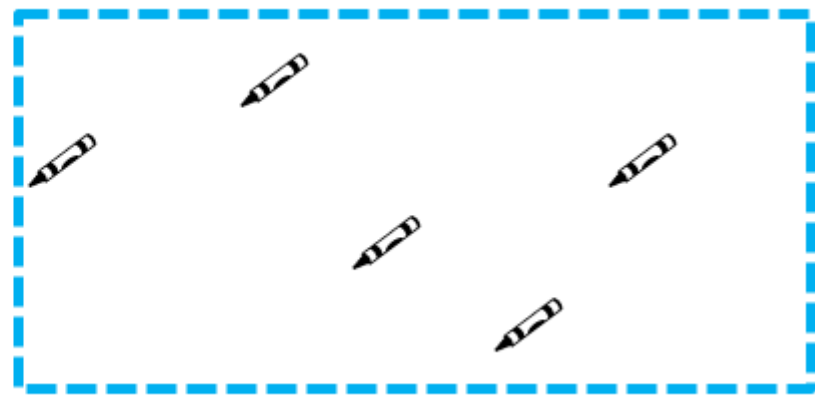
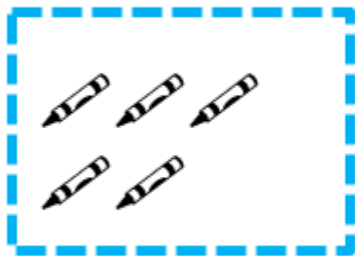
①指著第 5 個蘋果說 5 個蘋果在這裡

②敘述中有 5 個蘋果合起來的意思





如何檢驗孩子**數的保留概念**？



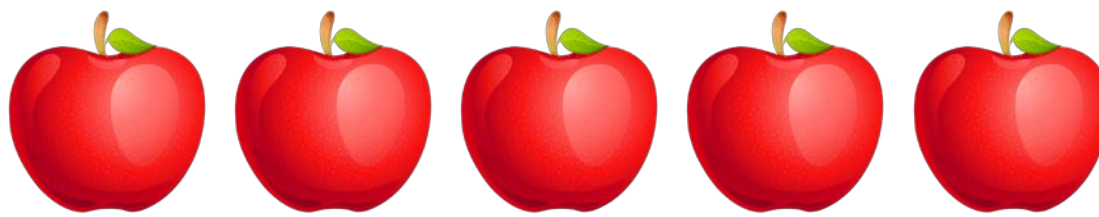
問法一：哪一堆鉛筆比較多？



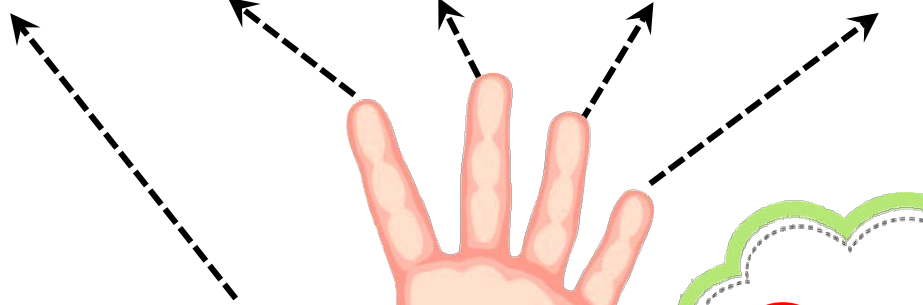
問法二：左、右兩堆都有 5 隻鉛筆，
哪一堆鉛筆比較多？

5 枝放哪都不受影響

當世界改變時.....



a b c d e



$c + f = ?$

從頭數 & 往上數

例：5個蘋果和3個蘋果合起來有幾個蘋果？

從頭數

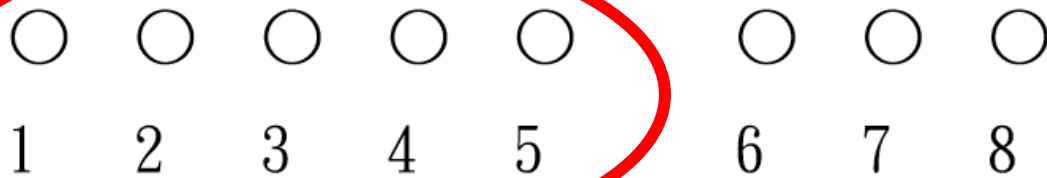
往上數



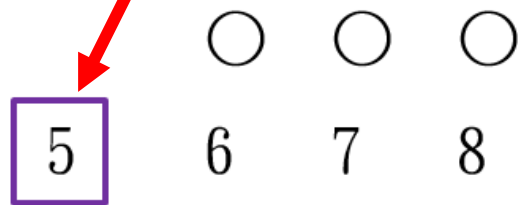
如何幫助從頭數的學生改用往上數來解題？

第 5 個聲音 $\times \checkmark$ 與合起來有 $\times \checkmark$ 個的轉換

從頭數：



往上數：



一個一數 & 又一往上(下)數

一個一數：從頭數

又一往上數：由任意數開始往上數





數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

十個一數 & 又十往上(下)數

又十往上數 的能力
需不需要培養？



？ 為什麼要學習**往上數**及**又十往上數**？

① 方便點數

② 為利用點數策略解決加減問題鋪路。

$$38 + 25 = (\quad)$$

$$71 - 25 = (\quad)$$

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

$$38 + 25 = ()$$



讓學生對
數有感

$$71 - 25 = (\quad)$$



讓學生對
數有感

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

$$38 + 25 = ()$$

有何差別？

$$38 \text{ 元} + \textcircled{10} \textcircled{10} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} = () \text{ 元}$$

$$38 \text{ 元} \quad \textcircled{10} \textcircled{10} \textcircled{10} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1}$$

$$25 \text{ 元} \quad \textcircled{10} \textcircled{10} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1}$$

命名與說讀聽寫做

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

命名活動：

唱出數詞、寫出數字。

一年級特別重要！

說、讀、聽、寫：

用數詞或數字描述物件的個數。

做(表現數)：

聽到數詞或看到數字，拿出對應的物件。

命名活動

1→2→3→ () → () → ()

說、讀、聽、寫



有 () 個蘋果。

做(表現數)

請你拿出5個蘋果 (畫出5個圈圈)

？ 如何幫孩子學會1—100的命名？

1~10 的命名：模仿

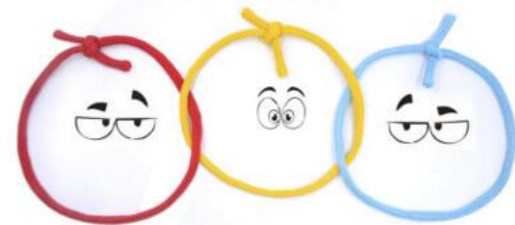
0 的教學：由有至無

11~20 的命名：模仿

21~30 的命名：溝通

31~100 的命名：類比

重要



教20以上的數

學生已熟練 1~20 的唱數

21 個，再來 1 個是多少個？

看到
關係

51個再來1個是多少個？



29 個，再來 1 個是多少個？

9 個再來 1 個是 10 個，

19 個再來 1 個是 20 個，

29 個再來 1 個是多少個？



若學生無法答出 30 的話...

無法
類比

①先告訴學生答案

例如：29 個再來 1 個是 30 個

②再幫助學生看到命名的**規律**

例如：9 個再來 1 個是 10 個

19 個再來 1 個是 20 個

所以 29 個再來 1 個是 30 個

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

?

0 怎麼教？

沒有



0

怎麼說？

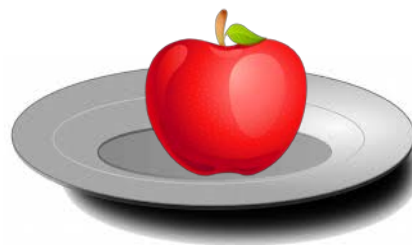
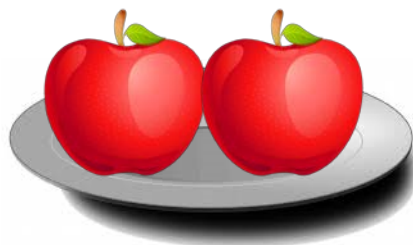
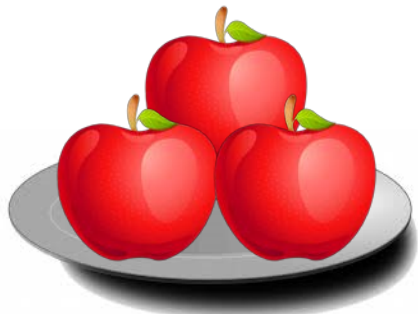
怎麼說？

3

2

1

?



說、讀、聽、寫 & 做

說、讀、聽、寫：



用數詞或數字描述給定物件的個數

寫出 5 枝筆、唸出 \times \checkmark 枝筆

做(表現數)：

聽到數詞或看到數字，拿出對應的物件



數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

請拿出 5 枝鉛筆：

① 拿出 5 枝鉛筆：



拿出 5 枝鉛筆

拿出 5 個花片

二年級命名活動：100~1000

100~200 的命名學：要詳細

無法類比 1~100 數詞的是教學或檢查的重點



建議二上
好好教

二年級命名活動：100 ~ 1000

100~200 的命名

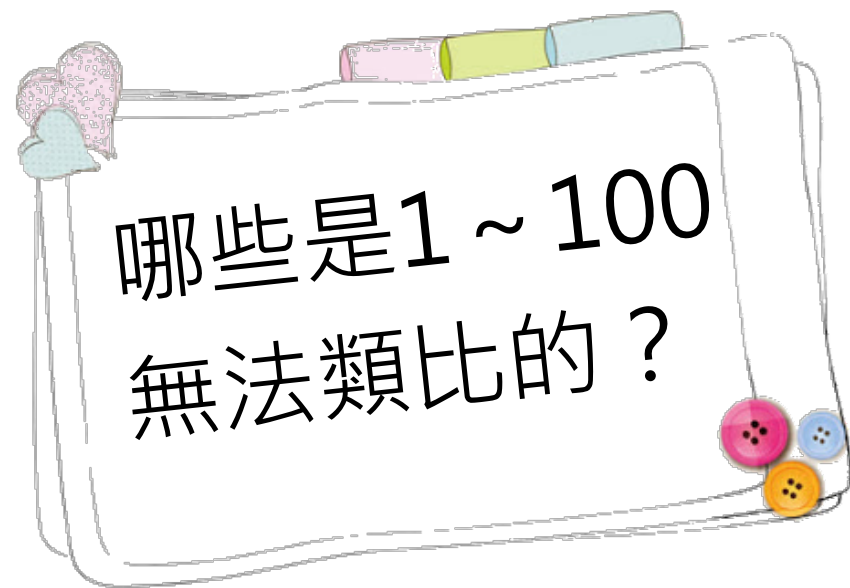
教學重點是什麼？

25 → 26

38 → 39

125 → 126

138 → 139



119 → 120

難

101



109



110

129 → 130

200~1000 的命名：

200~300，300~400，……的數詞序列

100~200 的數詞序列類似。



二下教學
類比

三年級命名活動：1000 ~

10000

1000~2000 的教學：**1001** → **1009** → **1010**

無法類比 1~1000 數詞的是教學或檢查的重點

2000~10000 的教學：

2000~3000，3000~4000，……的數詞序列

和 1000~2000 的數詞序列類似。

四年級 - 1億以內的數、五年級 - 1京以內的數

① 十進位位值系統：

請讀出：145240607143825

② 萬進位位值系統：

請讀出：145, 2406, 0714, 3825



數學脈絡及數學本質系列學習

台南市

數學領域

逢十進一

十進位記數法：145240607143825

百	十	兆	千	百	十	億	千	百	十	萬	千	百	十	一
兆	兆		億	億	億		萬	萬	萬					
1	4	5	2	4	0	6	0	7	1	4	3	8	2	5

萬進位記數法：145, 2406, 0714, 3825

兆	億	萬	一
145	2406	0714	3825

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

萬進位記數法：145, 2406, 0714, 3825

兆	億	萬	一
145	2406	0714	3825



重點

掌握1-1000的數字

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

萬進位記數法：145, 2406, 0714, 3825

兆	億	萬	一
145	2406	0714	3825



需要教2種系統：

(1) 十進位結構：萬、十萬、百萬、千萬

(2) 1萬～9999萬

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域



銀行是幾進位？
可以領拾萬嗎？

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

98-04-40-05E

郵政存簿儲金

新立戶
一般存款
轉帳存款

存款單

郵局代號	局 號						檢號	帳 號						檢號	日 期					
700	2	4	4	1	0	0	7	7	1	2	3	4	5	6	107	年	6	月	10	日
戶 名	王大明						存款金額				仟	佰	拾	萬	仟	佰	拾	元		
							新臺幣 (小寫)								1	0	0	0	0	

儲匯壽險專用章

主 管：_____

- ※填單說明：1. 一般存款時，請將本單隨儲金簿一併交郵局辦理(儲金簿於辦畢後即退)。
2. 存款金額欄請在空格劃橫線 例：新臺幣

				5	0	0	0	0
--	--	--	--	---	---	---	---	---

驗
證
欄

交易代號：1301 新立戶 1501 現金存款 1524 轉帳存款 524,000束(100張)101.10.190x105mm 80g/m²模(千义)保管年限五年

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

千進位記數法：10, 234, 567, 891

ten「billion」, two hundred thirty-four「million」,
five hundred sixty-seven「thousand」,
eight hundred ninety。

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

① 十進位位值系統：

② 萬進位位值系統：

1 萬(億、兆)到 9999 萬(億、兆)數詞序列

③ 十進位和萬進位位值系統互換

④ 理解整數位值系統(十進位表示法)

$$345 = 3 \times 100 + 4 \times 10 + 5 \times 1$$

小數、整數都是同一個系統

108課網
五年級匯整

基數(集合數) vs 序數(順序數)

集合數及順序數的中文描述很相似，但它們是兩種不同的數概念。

中文：1、2、3

第1、第2、第3

英文：One、two、three

first、second、third



集合數

順序數

何者先教？



情境在於
線性排列

為何基數要學到億、兆，
而序數只要學到第 50 以內或更小的範圍？

數詞序列存在著先後順序，即能標示其在群體中的位置

→ 256、257、()、259

→ 109、()、()、112

集合數會，順序數就會

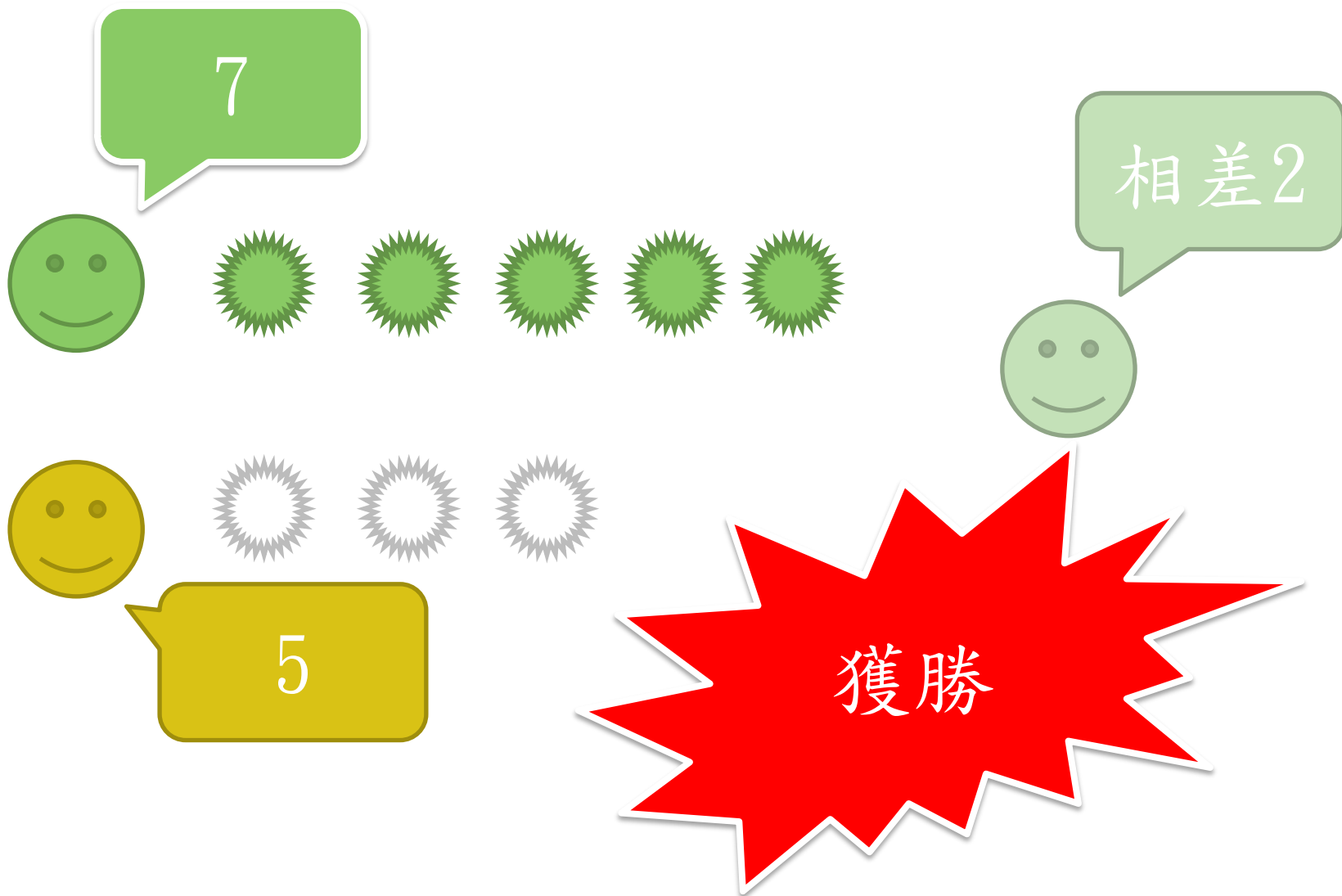
猜猜有多少

一、準備教具







- ❖ 磁吸花片兩組(一組10片)
- ❖ 白板兩個

二、活動流程

1. 三人一組，兩人當選手，一人當計算機。
2. 選手自由在白板上貼出數個花片，由計算機說出兩人相差幾個花片。
3. 選手判斷對方有幾個花片，說出數字，答對者獲勝。




數一數，有多少？比較多的，打勾。

	<input type="checkbox"/>	()
	<input type="checkbox"/>	隻
	<input type="checkbox"/>	()
<hr/>		
	<input type="checkbox"/>	()
	<input type="checkbox"/>	隻
	<input type="checkbox"/>	()

畫圈做做看，再圈出答案。

6 朵  和 3 朵 ，哪一種比較少？



( , ) 比較少。

(1) 小宇有 4 枝鉛筆，小平有 8 枝鉛筆，誰的鉛筆比較多？多幾枝？

算式：



() 的鉛筆比較多，多 () 枝。

(2) 卡爾有 9 顆草莓和 4 顆桃子，草莓比桃子多幾顆？

算式：



多 () 顆。

(3) 佳欣今年 9 歲，冠廷今年 7 歲，冠廷比佳欣小幾歲？

算式：

小 () 歲。

數的大小與量的多少





2

5

2顆西瓜比5粒葡萄
大很多，為什麼2比
5小？



數的大小與量的多少

2顆西瓜比5粒葡萄大很多

⇒ 2顆西瓜的體積比5粒葡萄的體積大

2個比5個少

⇒ 數字2比數字5小。

體積的大小和數的大小的迷思

如何教？

2 比 5 小

2顆西瓜比5粒葡萄大

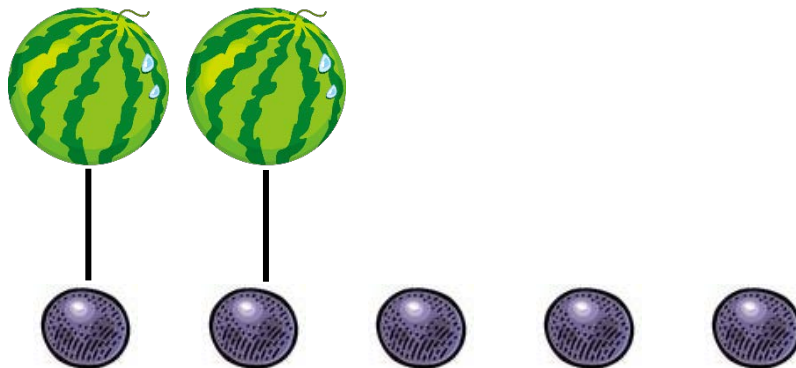
體積

大小

2顆西瓜比5粒葡萄少

數量

多少



數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

2顆西瓜、5粒葡萄

2 比 5 小

2、5是集合的描述

先學

量的多少

數的大小

再學

一一對應

2個比5個少

2 比 5

2 顆西瓜比 5 粒葡萄少，

⇒ 可以說成 2 比 5 小，

⇒ 可以記成 $2 < 5$ 。

量的多少 ⇨ 數的大小

提供足夠多一樣大的報紙，比較 A、B
兩間教室面積的大小。

是否要數出鋪滿教室報紙的張數？

先有多少，才會有大小

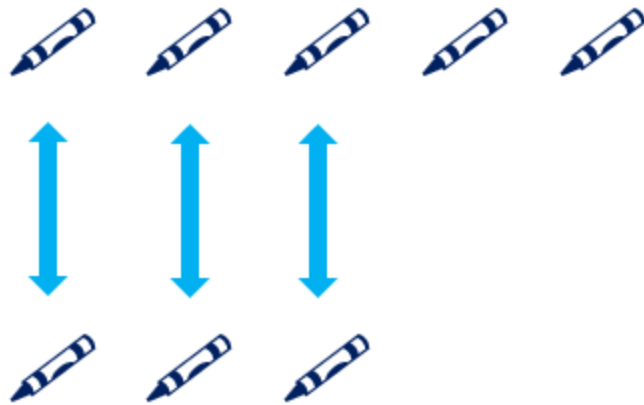


① 一對一對應(量的多少)

② 數字的大小

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域



5 枝比 3 枝多 \Rightarrow 5 比 3 大

3 枝比 5 枝少 \Rightarrow 3 比 5 小

量

數



如何教？



為什麼 21 比 15 大？



位值
比較

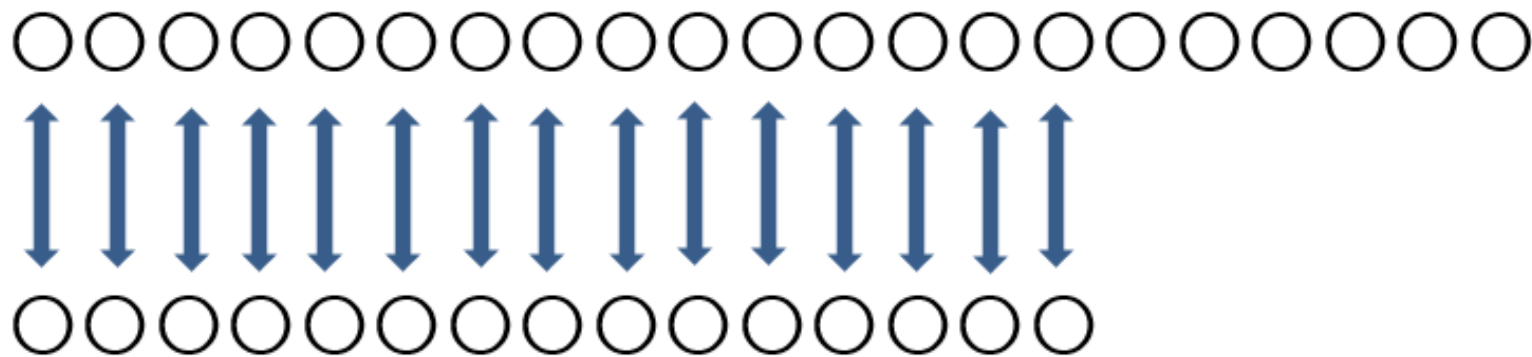


一一
對應



數詞
序列

為什麼 21 比 15 大？



① 21 個比 15 個多 \Rightarrow 21 比 15 大

② 先唸到 15，後唸到 21 \Rightarrow 21 比 15 大

③ 利用位值比較，2 比 1 大 \Rightarrow 21 比 15 大

畫一畫，算一算，圈一圈

5 看數字，畫○，並把比較小的數字圈起來：

21

16

誰比較少？16比較少。16比誰少，16比21少。

多單位概念

10個一數

vs

以10為單位

？ 要有**哪些能力**才能點數” 共有“多少元？

數數看，共有多少錢(元)？

⑩ ⑩ ⑩ ⑩ ① ① ① ① ① ① ① ①

一個一數：共有 12 個錢。

十個及一個一數：共有 48 元。

十個一數

又一

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

一定要與左邊連系

① ① ① ① ① ① ① ① ① ①

① ① ① ① ① ① ① ① ① ①

① ① ① ① ① ① ① ① ① ①

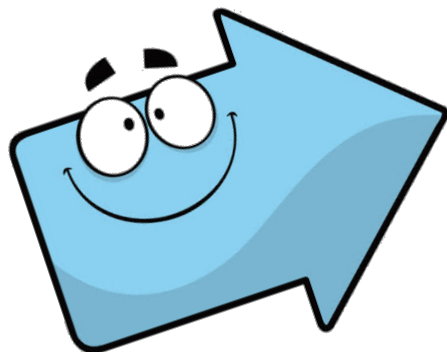
① ① ① ①

⑩ ⑩ ⑩ ① ① ① ①

十個一數：先會左邊 ⇨ 才會右邊

「77」這個數字中，
左邊的「7」是右邊的「7」的多少倍？

基準量 & 比較量問題



為什麼？

「77」這個數字中，
左邊的「7」是右邊的「7」的多少倍？

個數的觀點：

左邊的7是7個「10」，而右邊的7是7個「1」，
都是7個，一樣多。

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

「77」這個數字中，
左邊的「7」是右邊的「7」的多少倍？

一年級不要出

個數一樣，單位不一樣

同單位才能進行比較

以相同單位描述的觀點：

左邊的7是70個「1」，右邊的7是7個「1」

左邊的7是700個「0.1」，右邊的7是70個「0.1」

左邊的7是7個「10」，右邊的7是0.7個「10」

左邊的7所代表的值是右邊7的10倍。

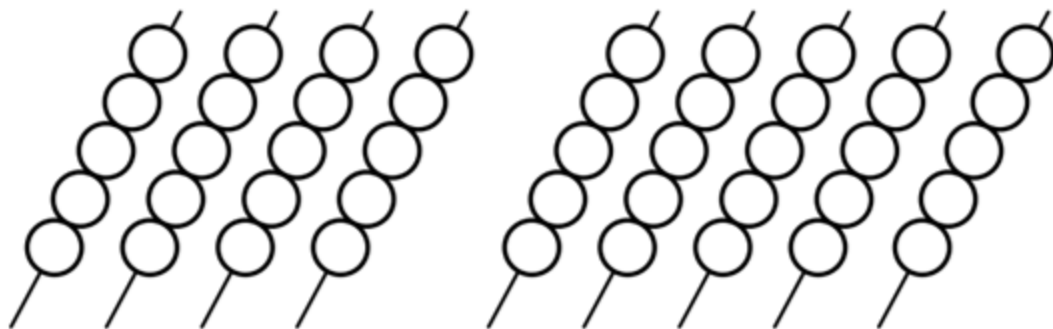
左邊7是70，70是7的10倍

三年級的教材

基準量&比較量

篩選測驗通過率最低 5 題

一串魚丸有 5 顆，數數看，下圖中一共有多少顆魚丸？一共有（ ）顆魚丸。



為什麼只進行 2 個、5 個、10 個一數 的活動
不進行 其它 (例如 7 個一數) 的活動？

7 個一數，聲音的 pattern 不好抓，用處少。

零散的物件
我們較常使
用 2 個一數

錢幣有 5 元
時鐘有 5 分
用 5 個一數

因為是十位
進，所以常
用 10 個一數

面對零散排列的物件時，
能進行 2 個一數的點數活動，
也能進行 5 個或 10 個一數的活動嗎？



數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域



2個一數？

5個一數？

10個一數？

？ 學生需要有哪些能力才能進行2個一數？

學生必須確定每一堆都剛好有 2 個物件，
以及熟悉 2、4、6、8、10、…的數詞序列，
才能進行 2 個一數的活動。



要先5個或10個
放一堆才能數



零散物件只能2個一數，因為可以確定一次拿出的是2個，而無法做到5個或10個一數。

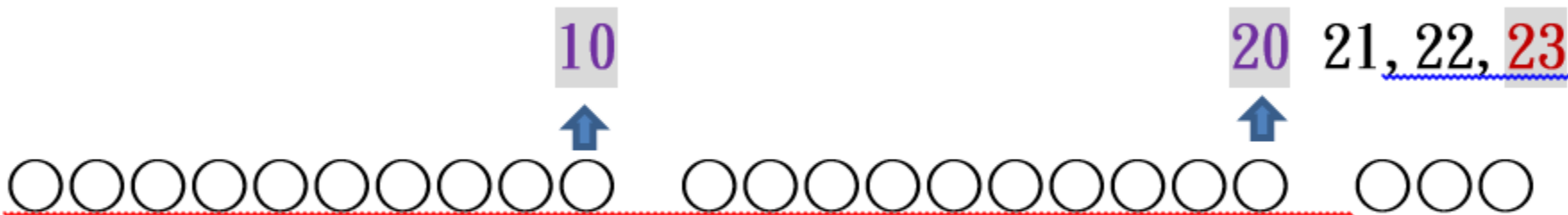
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ 10

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ 13

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ 22
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
○ ○

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

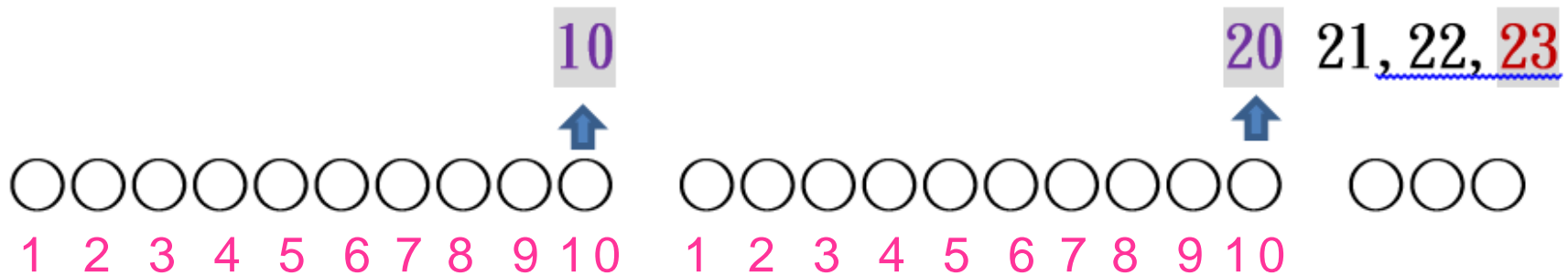


10個一數和1個一數的意義是一樣的。



數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域



1 個一數：1、2、3、4、...、23 個

10 個一數：10、20、21、22、23 個

10 個一數比 1 個一數有效率

用最後一個聲音代替前面那十個聲音



數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域



1 堆



2 堆



1、2、3 個

合起來有 2 堆 3 個

使用 2 個單位
來數





過程中用了幾個單位？

下圖共有多少個「○」？



用1個單位
來數

用 10、20、30、31、32、33、34 的方式點數，

?

過程中用了幾個單位？



1個一數和10個一數都
在數一個單位，只是1
個一數比較慢，10個一
數比較快。

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

下圖共有多少個「○」？

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

○ ○ ○ ○

1 為單位：10、20、30、31、32、33、34

2 種單位(多單位)：3 堆又 4 個

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

10個一數

10、20、30、31、32
、33、34

以10為單

3個10、4個1

兩者是不一樣的！



?

下方三種記法有何異同？

7000000、700 萬、7 百萬

值一樣
但記法不同



數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

?

我是以什麼單位在記數的？



點數 4 張百元鈔票

①100、200、300、400，共有 400 元

②1 百、2 百、3 百、4 百，共有 4 百元

這兩種點數的方法有何不同？



想一想，下方是以什麼單位？

2.4

238

$\frac{7}{8}$

我們只有一套數字系統，
都是以1為單位，後續要
怎麼解讀都可以。

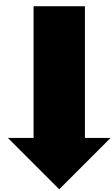
數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

?

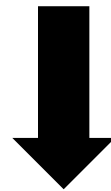
想一想，下方是以什麼單位？

2.4



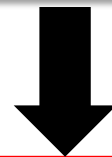
2.4個1
24個0.1
240個0.01

238



238個1
23.8個10
2380個0.1

$\frac{7}{8}$

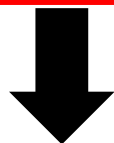


$\frac{7}{8}$ 個1
7個 $\frac{1}{8}$

10個一數

vs

以10為單位

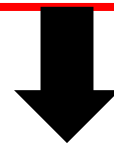


10

20

30

40



1個10

2個10

3個10

4個10

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

?

這三種記法的解題方法有何不同？

$$38 + 25 = (\quad)$$

⑩ ⑩ ⑩ ① ① ① ① ① ① ① ①

$$\begin{array}{r} 38 \\ +25 \\ \hline 63 \end{array}$$

38

+25

13

+50

63

⑩ ⑩ ① ① ① ① ①

38

+25

13

+5

63

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

$$\begin{array}{r} 38 \\ +25 \\ \hline 63 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ +25 \\ \hline 13 \\ +5 \\ \hline 63 \end{array}$$

加減乘除的直式算則
都是多個單位。



數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

$$38 + 25 = (\quad)$$

⑩ ⑩ ⑩ ① ① ① ① ① ① ① ①

⑩ ⑩ ① ① ① ① ①

$$\begin{array}{r} 38 \\ +25 \\ \hline 13 \\ +50 \\ \hline 63 \end{array}$$

這兩種記法
要怎麼教？

$$\begin{array}{r} 38 \\ +25 \\ \hline 63 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ +25 \\ \hline 13 \\ +5 \\ \hline 63 \end{array}$$

？ 學生使用的是1個單位還是2個單位？

學生出現下面的算式，是否給分？

$$\begin{array}{r} 32 \\ +27 \\ \hline 50 \\ +9 \\ \hline 59 \end{array}$$

以1為單位的算法，
不會混淆9的位值

9放在哪裡都是9，

沒有對齊個位的需求。

?

這個記法是1個單位還是2個單位的記法？

$$3 \frac{8}{9}$$

1個單位

+2

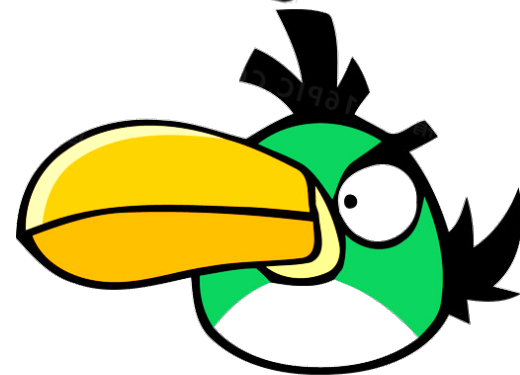
$$\frac{5}{9}$$



$$5 \frac{13}{9}$$

$$6 \frac{4}{9}$$

如何記才會是2個單位的記法？



數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

?

這個記法是1個單位還是2個單位的記法？

$$\begin{array}{r} 3 \frac{8}{9} \\ + 2 \frac{5}{9} \\ \hline \end{array}$$


1個單位



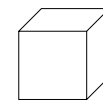
$$\begin{array}{r} 5 \frac{13}{9} \\ \hline \end{array}$$


$$6 \frac{4}{9}$$

2個單位

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \frac{1}{9} \\ 3 \frac{8}{9} \\ + 2 \frac{5}{9} \\ \hline 5 \frac{13}{9} \\ \hline 6 \frac{4}{9} \end{array}$$

$$\rightarrow 6 \frac{4}{9}$$



篩選測驗通過率最低 5 題



下面哪一個數字的個位數字不是4？

- (1)4 (2)14 (3)40 (4)44



	
十位	個位



為什麼通過率不高？

篩選測驗通過率最低 5 題

真真將 10 條橡皮筋綁成 1 捆，綁了 4 捆又 3 條。

請問「4 捆又 3 條」和多少條橡皮筋一樣多？

- (1) 7 條 (2) 34 條 (3) 40 條 (4) 43 條

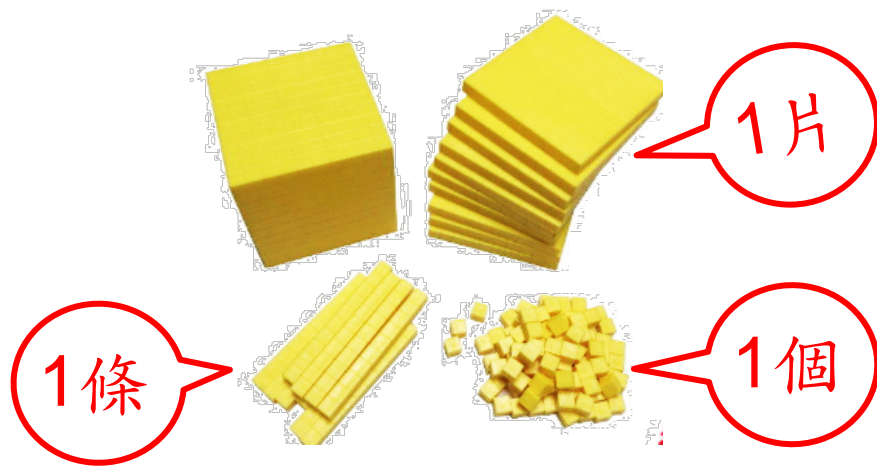
少了積木與生活情境的連結。

狗腿問題

1 隻狗 4 條腿，5 隻狗有 20 條腿，跑掉 1 隻狗
會剩下幾條腿。

為何學生回答 19 條腿？

教學時，不同的單位
要用不同的量詞。



溝通多單位的具體物

可拆

是長度的等價關係

(1) 吸管：1 根，1 網(10 根)，1 把(10 網)

(2) 積木：白色積木(個)，橘色積木(條)

百格板(片)，千格板(塊)

(3) 圖像：①，⑩，100，1000

(4) 錢幣：1 元，十元，百元，千元

成比例

不成比例

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

吸管：一對一的對應關係

1 網拆開 \Rightarrow 10 根

10 根合起來 \Rightarrow 1 網

積木：長度、面積或體積相等

10 個白色積木和 1 條橘色積木一樣長

1 條橘色積木 \longleftrightarrow 10 個白色積木

100 個白色積木和 1 片百格板面積一樣大

1 片百格板 \longleftrightarrow 100 個白色積木

教數詞序列時，橘色積木是10；教算則時，橘色積木是一個

10



不建議一開始就教積木，可以讓學生感受點數的多樣化。

幾十幾 \longleftrightarrow 幾個十幾個一

化聚：大單位化成小單位

小單位聚成大單位

位名 vs 計數單位

教積木

教圖像



位名

十位	個位
2	5

個位：記幾個一的位置

十位：記幾個十的位置


教計算時

$$\begin{array}{r} \textcircled{10} \quad \textcircled{1} \\ 3 \quad 8 \\ + 2 \quad 5 \\ \hline \end{array}$$

8 個 $\textcircled{1}$ 加 5 個 $\textcircled{1}$

3 個 $\textcircled{10}$ 加 2 個 $\textcircled{10}$

基本加減事實













 不會加法，能夠解決加法問題嗎？

請使用 英文字母讀法 替代 阿拉伯數字讀法。

請用 英文字母的符號 替代 阿拉伯數字的記法。

點數也可以成功解題

不會加法，能夠透過點數解決加法問題

a	b	c	d	e	f	a	b	c	d
									
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j

代公式的概念

用加法 $f + d$ 能算出答案嗎？

有那些能力之後，才能用加法算出答案？

加法問題開始教時，不要直接教加法。

如何提升解題的效率：

從頭數



往上數

- ① 提升原來解題策略(點數)的效率。
- ② 製作表格，透過查表解決問題。
- ③ 發展另一套解題工具(公式)。

點數解決問題，算式只是記錄。

點數解決問題

1

➔ 用算式 $f + d = j$ 記錄解題活動(紀錄)

➔ 利用加法 $f + d$ 算出答案(工具) 2



數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

甲有 5 元，乙有 3 元，兩人共有多少元？

不會加法，也能解決加法問題

方法一：先學會點數解題，再用加法算式來記錄，

最後將加法算式由紀錄轉換為工具

方法二：直接教加法來解題

一年級的教學重點，
把基本加減法變工具



哪一個是加法問題？

① 5 個花片和 3 個花片，合起來共有幾個花片？

做數

點數

記錄

工具

② 如圖，5 個和 3 個花片，合起來有幾個花片？



點數問題



基本乘法事實是①②③哪一個？

基本加法事實

基本減法事實

基本乘法事實

基本乘法事實：

- 0~9 的乘法
- ② 1~9 的乘法
- ③ 2~9 的乘法

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

 358 358 4107 $+267$ -185 $\times 5083$

我們記憶「九九加、減法表」、「九九乘法表」
這些關鍵性的算式，加上一些解題技巧，
就能夠解決所有數字的加、減、乘計算問題。

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

$$\begin{array}{r} 358 \\ + 267 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 358 \\ - 185 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4107 \\ \times 5083 \\ \hline \end{array}$$

一位數加法

我們記憶「**十十加**、**減法表**」、「**十十乘法表**」
這些關鍵性的算式，加上一些解題技巧，
就能夠解決所有數字的加、減、乘計算問題。

佔地為王

2	49	45	16	35	8
28	4	25	24	7	42
21	54	14	64	36	18
12	30	5	1	6	40
56	3	20	81	63	27
10	32	48	15	9	72

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---



數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

$$\begin{array}{r} 8 \\ + 5 \\ \hline 13 \end{array}$$

$$8 + 2 + 3 = 13$$

$$8 + 5 = 13$$

$$\begin{array}{r} 43 \\ - 18 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$13 - 5 = 8$$

閃示卡練習

$$10 - 8 + 3 = 13$$

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

基本加法事實

$0+0=0$	$1+0=1$	$2+0=2$	$3+0=3$	$4+0=4$	$5+0=5$	$6+0=6$	$7+0=7$	$8+0=8$	$9+0=9$
$0+1=1$	$1+1=2$	$2+1=3$	$3+1=4$	$4+1=5$	$5+1=6$	$6+1=7$	$7+1=8$	$8+1=9$	$9+1=10$
$0+2=2$	$1+2=3$	$2+2=4$	$3+2=5$	$4+2=6$	$5+2=7$	$6+2=8$	$7+2=9$	$8+2=10$	$9+2=11$
$0+3=3$	$1+3=4$	$2+3=5$	$3+3=6$	$4+3=7$	$5+3=8$	$6+3=9$	$7+3=10$	$8+3=11$	$9+3=12$
$0+4=4$	$1+4=5$	$2+4=6$	$3+4=7$	$4+4=8$	$5+4=9$	$6+4=10$	$7+4=11$	$8+4=12$	$9+4=13$
$0+5=5$	$1+5=6$	$2+5=7$	$3+5=8$	$4+5=9$	$5+5=10$	$6+5=11$	$7+5=12$	$8+5=13$	$9+5=14$
$0+6=6$	$1+6=7$	$2+6=8$	$3+6=9$	$4+6=10$	$5+6=11$	$6+6=12$	$7+6=13$	$8+6=14$	$9+6=15$
$0+7=7$	$1+7=8$	$2+7=9$	$3+7=10$	$4+7=11$	$5+7=12$	$6+7=13$	$7+7=14$	$8+7=15$	$9+7=16$
$0+8=8$	$1+8=9$	$2+8=10$	$3+8=11$	$4+8=12$	$5+8=13$	$6+8=14$	$7+8=15$	$8+8=16$	$9+8=17$
$0+9=9$	$1+9=10$	$2+9=11$	$3+9=12$	$4+9=13$	$5+9=14$	$6+9=15$	$7+9=16$	$8+9=17$	$9+9=18$

基本減法事實

$0-0=0$	$1-1=0$	$2-2=0$	$3-3=0$	$4-4=0$	$5-5=0$	$6-6=0$	$7-7=0$	$8-8=0$	$9-9=0$
$1-0=1$	$2-1=1$	$3-2=1$	$4-3=1$	$5-4=1$	$6-5=1$	$7-6=1$	$8-7=1$	$9-8=1$	$10-9=1$
$2-0=2$	$3-1=2$	$4-2=2$	$5-3=2$	$6-4=2$	$7-5=2$	$8-6=2$	$9-7=2$	$10-8=2$	$11-9=2$
$3-0=3$	$4-1=3$	$5-2=3$	$6-3=3$	$7-4=3$	$8-5=3$	$9-6=3$	$10-7=3$	$11-8=3$	$12-9=3$
$4-0=4$	$5-1=4$	$6-2=4$	$7-3=4$	$8-4=4$	$9-5=4$	$10-6=4$	$11-7=4$	$12-8=4$	$13-9=4$
$5-0=5$	$6-1=5$	$7-2=5$	$8-3=5$	$9-4=5$	$10-5=5$	$11-6=5$	$12-7=5$	$13-8=5$	$14-9=5$
$6-0=6$	$7-1=6$	$8-2=6$	$9-3=6$	$10-4=6$	$11-5=6$	$12-6=6$	$13-7=6$	$14-8=6$	$15-9=6$
$7-0=7$	$8-1=7$	$9-2=7$	$10-3=7$	$11-4=7$	$12-5=7$	$13-6=7$	$14-7=7$	$15-8=7$	$16-9=7$
$8-0=8$	$9-1=8$	$10-2=8$	$11-3=8$	$12-4=8$	$13-5=8$	$14-6=8$	$15-7=8$	$16-8=8$	$17-9=8$
$9-0=9$	$10-1=9$	$11-2=9$	$12-3=9$	$13-4=9$	$14-5=9$	$15-6=9$	$16-7=9$	$17-8=9$	$18-9=9$

如何幫助學生記憶基本加法和基本減法事實？

方法一：加減法表前後項關係

方法二：合十，拆十，數的分解



數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

$$4 + 5$$

背

和是10以內的加法

和超過10以上的加法

$$8 + 5$$

$$8 + 2 + 3$$

$$8 - 3$$

背

被減數10以內的減法

被減數超過10的減法

$$12 - 5$$

$$10 - 5 + 2$$

如何幫助學生記憶基本加法和基本減法事實？

方法一：加減法表前後項關係

方法二：合十，拆十，數的分解

教材
使用

大人過於形式化
的教學。



數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

學生必須先熟記和是10以內的基本加法，
才能記憶和超過10的基本加法(例如 $8+5$)

$$4+5$$

$$8-3$$

$$8+5=8+2+3=13$$

$$13-5=10-5+3=8$$

$$8+5=3+5+5=13$$

$$13-5=13-3-2=8$$

以「5 個和 3 個花片合起來有幾個花片」為例

方法一：兩次做數、一次點數

第一次做數：畫出 5 個圓圈表示 5 個花片。

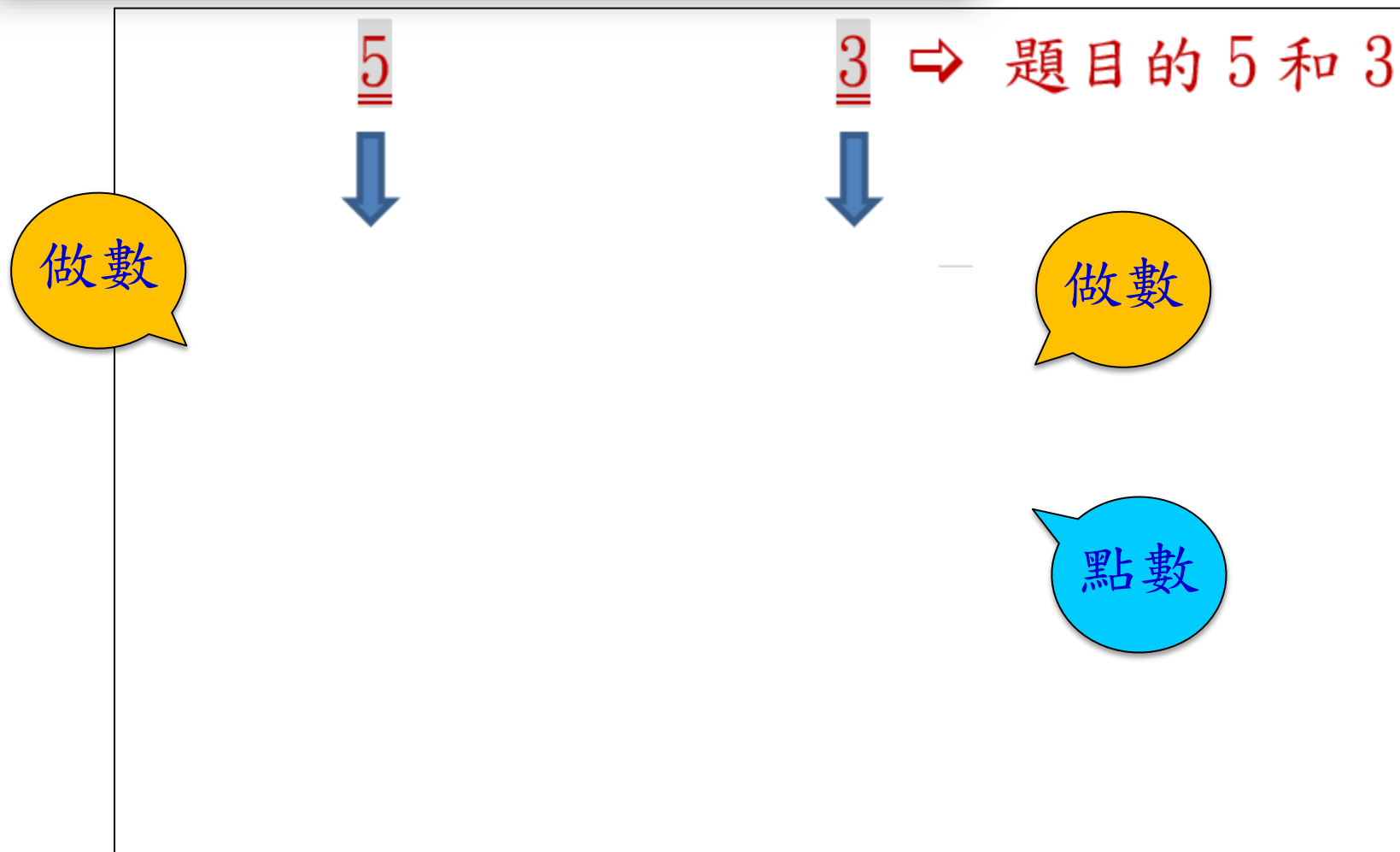
第二次做數：畫出 3 個圓圈表示 3 個花片。

一次點數：從頭開始點數，得到 8 個花片。

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

方法一：兩次做數、一次點數

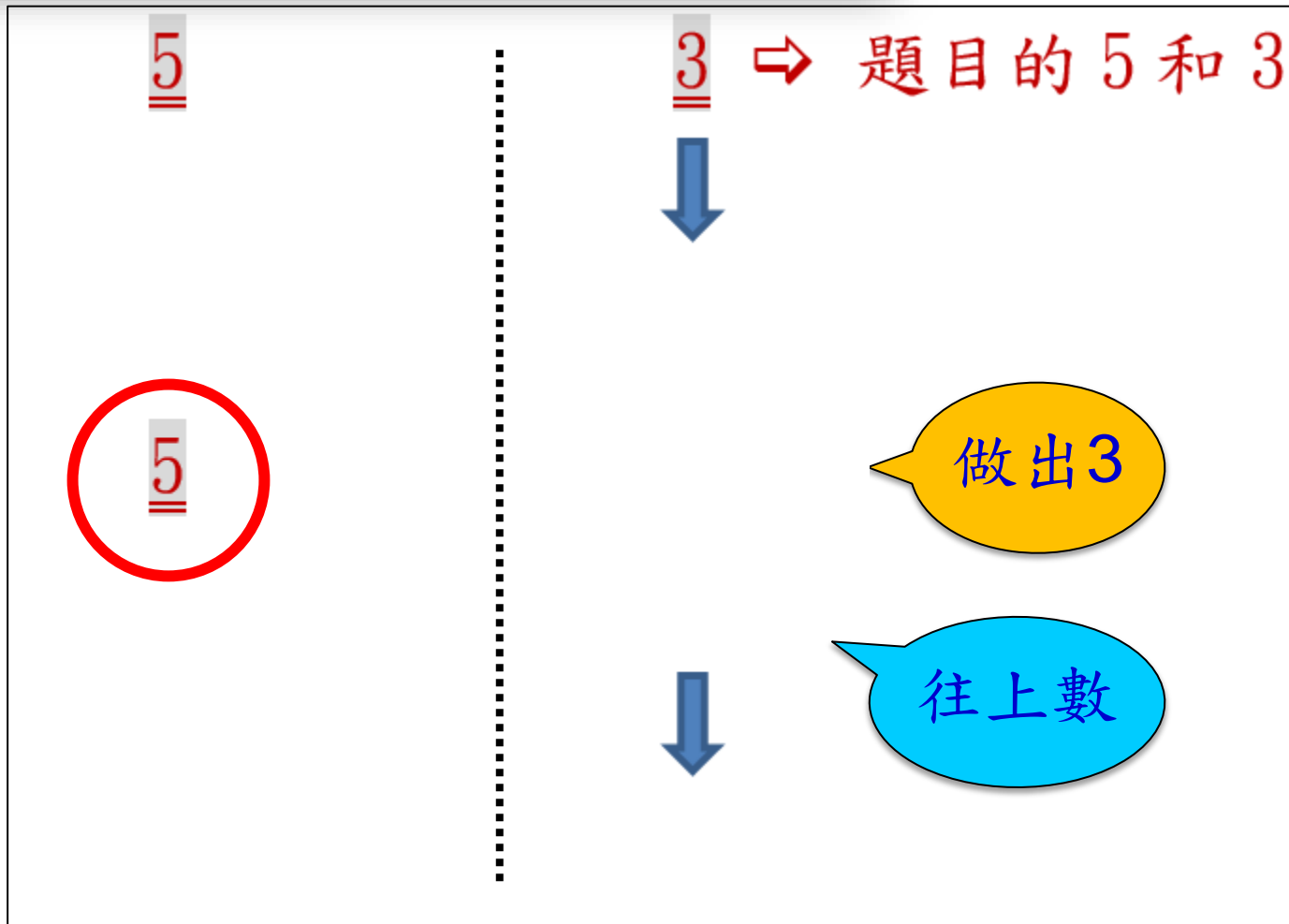


方法二：一次做數、一次點數

第一次做數：畫出 3 個圓圈表示 3 個花片。

一次點數：從 5 開始點數，得到 8 個花片。

方法二：一次做數、一次點數



方法三：利用手指當成加數的計數器



6

學生不必畫出乙的 3 個花片 **從 5 開始點數。**

先伸出 1 根手指頭唸 6，表示數完乙的第 1 個花片後有 6 個花片；



7

再伸出 1 根手指頭唸 7，表示數完乙的第 2 個花片後有 7 個花片；

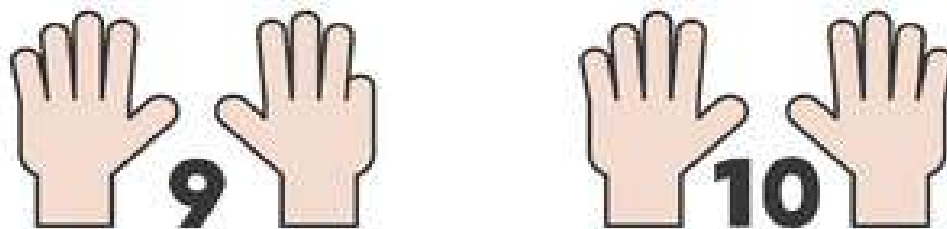
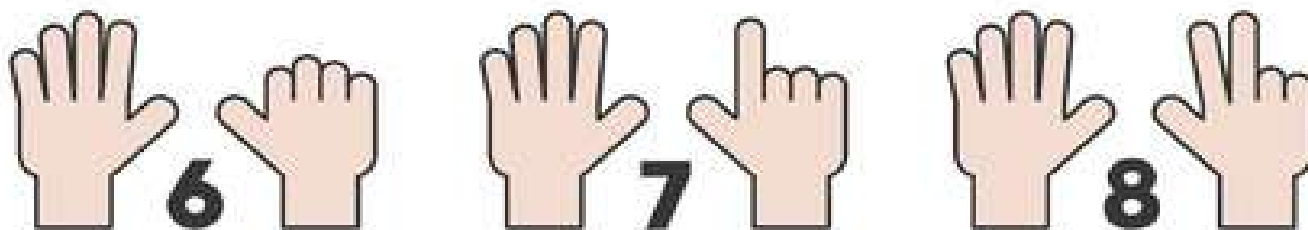
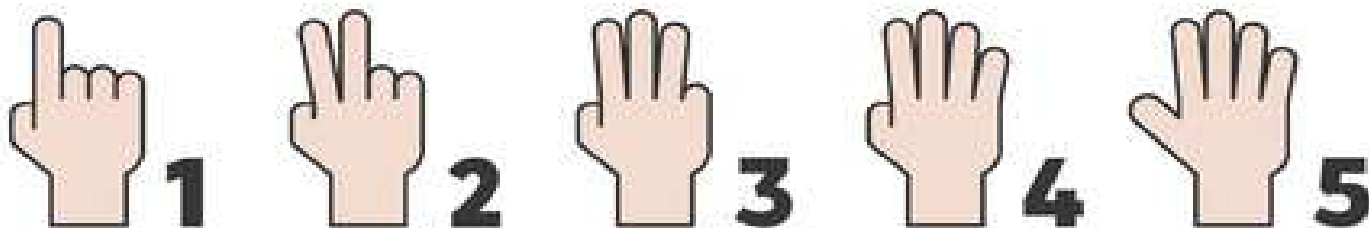
再伸出 1 根手指頭唸 8，表示數完乙的第 3 個花片後有 8 個花片。



8

發現伸出的手指頭有 3 根 表示已經數完乙的 3 個花片，得到共有 8 個花片的答案。

方法三：利用手指當成加數的計數器



減法的教學

以「8 個花片拿走 5 個剩下幾個花片」為例

方法一：兩次做數、一次點數

第一次做數：畫出 8 個圓圈表示 8 個花片。

第二次做數：在 8 個圓圈中畫掉 5 個圓圈。

一次點數：從頭開始點數，得到 3 個花片。

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

？ 畫掉5個，你覺得該畫前5個還是後5個？

8 ⇒ 題目的8



做數



做數

點數

方法二：一次做數、一次點數

第一次做數：畫出 5 個圓圈表示要拿走的 5 個花片。

一次點數：從 8 開始倒數，8、7、6、5、4，
得到剩下 3 個花片。

方法二：一次做數、一次點數

把唸出來的 8、7、6、5、4 拿走，
得到剩下 3 個花片的答案。



做數

點數

方法三：利用手指當成減數的計數器



8

不必畫出拿走的 5 個花片，從 8 開始點數。

伸出 1 根手指頭唸 8，表示拿走第 8 個花片



7

再伸出 1 根手指頭唸 7，表示拿走第 7 個花片



6

再伸出 1 根手指頭唸 6，表示拿走第 6 個花片



5

再伸出 1 根手指頭唸 5，表示拿走第 5 個花片



4

再伸出 1 根手指頭唸 4，表示拿走第 4 個花片

用最後一個聲音代替前面的數

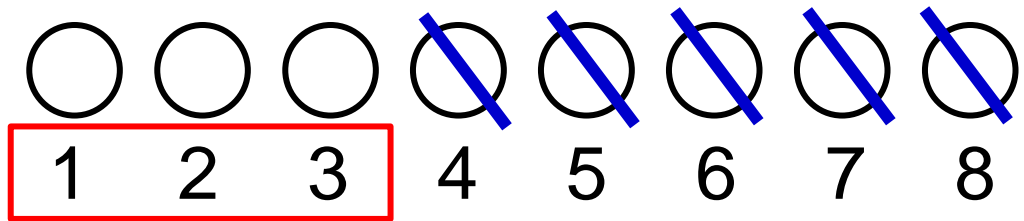
發現伸出的手指頭有 5 根，表示已經拿完

5 個花片，得到剩下 3 個花片的答案。

以「8個花片拿走5個剩下幾個花片」為例

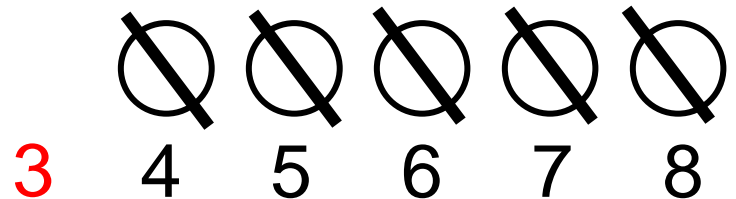
方法一

2次做數
1次點數



方法二

1次做數
1次點數



方法三

手指倒點數

超過10以上的加減法教學

學生必須先熟記和是10以內的基本加法，
才能記憶和超過10的基本加法(例如 $8+5$)
必須先熟記被減數10以內的基本減法，才能
記憶被減數超過10的基本減法(例如 $13-5$)

如何幫助學生熟記基本加、減法

方法一：加減法表前後項關係

方法二：合十、拆十、數的分解

方法一：加減法表前後項關係

5	+	1	=	6
5	+	2	=	7
5	+	3	=	8
5	+	4	=	9
5	+	5	=	10
5	+	6	=	11
5	+	7	=	12
5	+	8	=	13
5	+	9	=	14

3個變因

被加數

加數

和

固定一個變因，再
觀察其它2個變因
間的關係。

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

$$\begin{array}{r} 1 + 6 = 7 \\ 2 + 6 = 8 \\ 3 + 6 = 9 \\ 4 + 6 = 10 \\ 5 + 6 = 11 \\ 6 + 6 = 12 \\ 7 + 6 = 13 \\ 8 + 6 = 14 \\ 9 + 6 = 15 \end{array}$$

當被加數固定，

→ 加數多1，和也會多1

→ 加數少1，和也會少1

這是一個集合，要
有足夠的證據支持

再固定加數，看被加數與和
的關係

觀看前後項的關係來做答的案例

$$5 + 3 = ()$$

$$5 + 4 = ()$$

$$5 + 5 = 10 \Rightarrow 5 + 6 = ()$$

$$5 + 7 = ()$$

$$5 + 8 = ()$$

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

被減數固定

減法的教學亦同

減數固定

$$13 - 1 = 12$$

$$13 - 2 = 11$$

$$13 - 3 = 10$$

$$13 - 4 = 9$$

$$13 - 5 = 8$$

$$13 - 6 = 7$$

$$13 - 7 = 6$$

$$13 - 8 = 5$$

$$13 - 9 = 4$$



$$5 - 4 = 1$$

$$6 - 4 = 2$$

$$7 - 4 = 3$$

$$8 - 4 = 4$$

$$9 - 4 = 5$$

$$10 - 4 = 6$$

$$11 - 4 = 7$$

$$12 - 4 = 8$$

$$13 - 4 = 9$$

觀看前後項的關係來做答的案例

$$\textcircled{6} - 4 = (2)$$

$$7 - 4 = ()$$

$$\textcircled{8} - 4 = 4 \Rightarrow 9 - 4 = ()$$

$$10 - 4 = ()$$

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

方法二：合十、拆十、數的分解

學生需要會多少先備？

$$7 + 5 = 7 + \underline{3} + \underline{2} = \underline{7 + 3} + 2 = 12$$

$$13 - 7 = 13 - \underline{3} + \underline{4} = 13 - 3 - 4 = \underline{10} - 4 = 6$$

$$13 - 7 = \underline{10} + \underline{3} - 7 = \underline{10} - 7 + 3 = 3 + 3 = 6$$

此方法是過渡，最後學生都要背下來的。

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

全都得學

合十： $1+9=2+8=\dots\dots$.

拆十： $10-1=9$ 、 $10-2=8$ 、 $\dots\dots$

數的分解：9 分解為 1 和 8，2 和 7， $\dots\dots$.

8 分解為 1 和 7，2 和 6， $\dots\dots$.

$\dots\dots\dots$.

$13=10+3$ 、 $15=10+5$ 、 $\dots\dots$.

十幾減幾： $13-3=10$ 、 $15-5=10$ 、 $\dots\dots$.

整 理

- 1~9以內加減都要**背**下來
- 超過10的
 - 看前後項關係
 - 合十、拆十、分解

《熟悉後也要背下來》

$$\begin{array}{r} 18 \\ + 5 \\ \hline 23 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 43 \\ - 18 \\ \hline 25 \end{array}$$

?

思考我們課堂中使用花片的功能是什麼？

- ① 做數 — 點數
- ② 同構 — 具體 → 半具體 → 形式運算
- ③ 溝通

鼓勵用花片相當
於在鼓勵點數

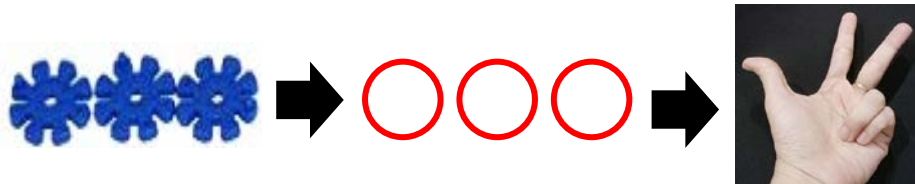


具體物(花片等)的使用時機：

①隨時取用

②有必要才使用

教學重點是要求學生利用加法來解題，
教師應限制學生使用花片。



點數解決問題

- ➡ 用算式 $f + d = j$ 記錄解題活動(紀錄)
- ➡ 利用加法 $f + d$ 算出答案(工具)

點數解題成功後應要求學生用算式來紀錄
並將算式由紀錄提升至工具。

數字急轉彎



卡牌數字

± 1 1~4 3張、5~10 2張

± 2 1~4 2張、5~8 3張、9~10 3張

± 3 1~4 3張、5~10 2張、9~10 3張

玩法一：撿紅點

1. 玩家每個人拿6~12張牌(3人每個人12張、4人每個人10張、5人每個人8張、6人每個人12張)
2. 剩下的牌抽出4張，放在桌上當題目，其餘放在旁邊當倉庫牌。



3. 每輪出1張牌，若無牌可出則出牌當題目，然後從倉庫再抽一張。
4. 玩家手上若無牌，但桌面上仍有題目，則從倉庫抽一張牌。


玩法二：心臟病

1. 玩家每個人拿6~12張牌(3人每個人12張、4人每個人10張、5人每個人8張、6人每個人12張)
2. 剩下的牌抽出1張牌當題目，不按照順序出牌，直到牌出完。

玩法三：接龍

各組抽出20張牌，利用20張牌排出一條龍。

整數加減算則



一年級需要

為什麼國小數學教學要透過下面的流程？

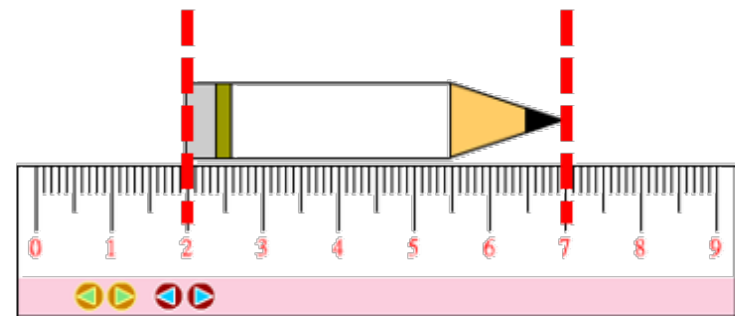
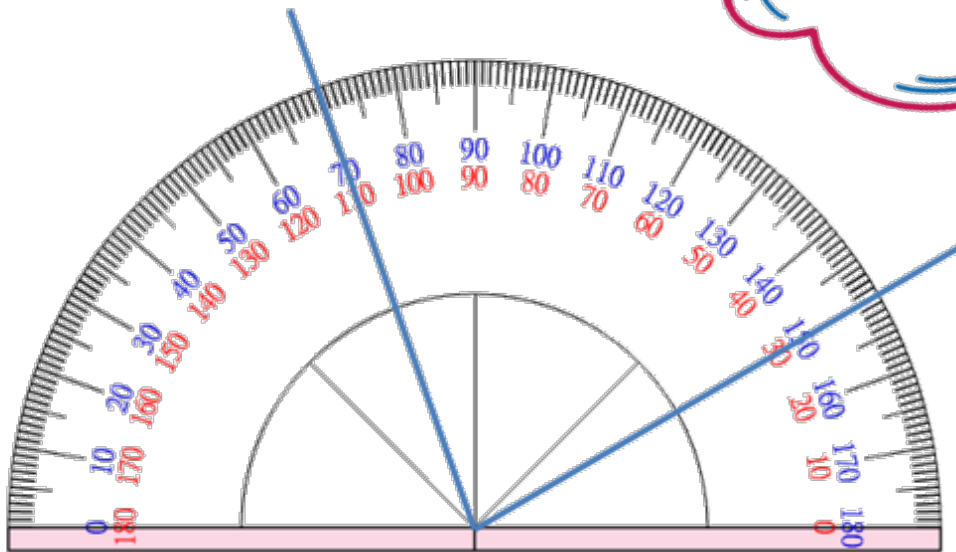
具體物操作 \Rightarrow 半具體物操作 \Rightarrow 形式運算

透過同構(isomorphism)幫助學生解題。

?

何謂同構？

這兩題题目的解法有沒有一樣？



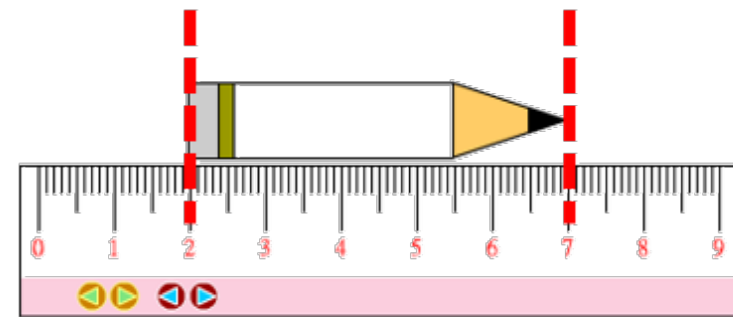
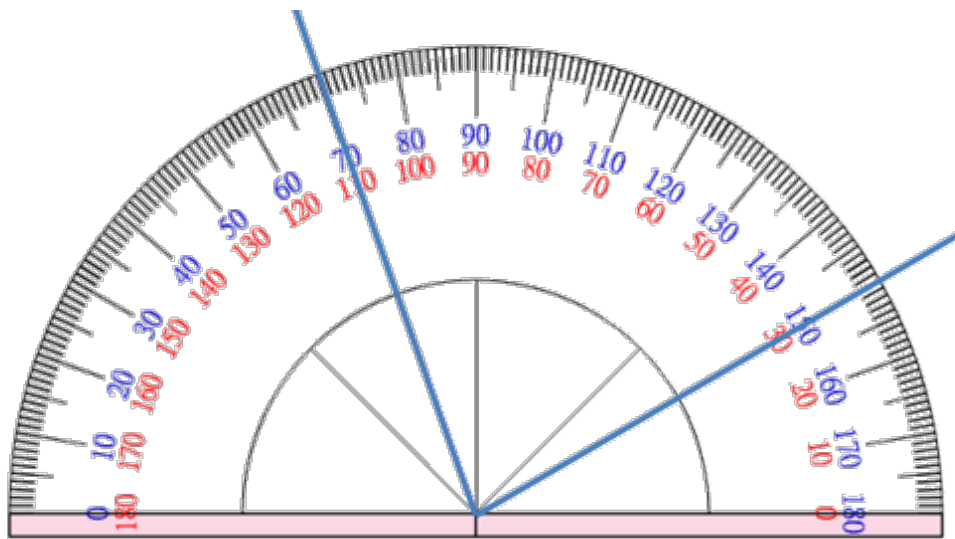
?

何謂同構？

幫助學生看到這兩個題目的解題過程都一樣，即是同構。

點數策略：

減法策略： $7-2=5$ vs $110-30=80$



低年級學生無法掌握具體物操作和形式運算間滿足同構關係的意義。

先幫助學生察覺具體物操作和半具體物操作間滿足同構的關係。

再類比至具體物操作和形式運算間的同構關係。

以後，只要幫助學生察覺具體物操作和形式運算間同構的關係即可。

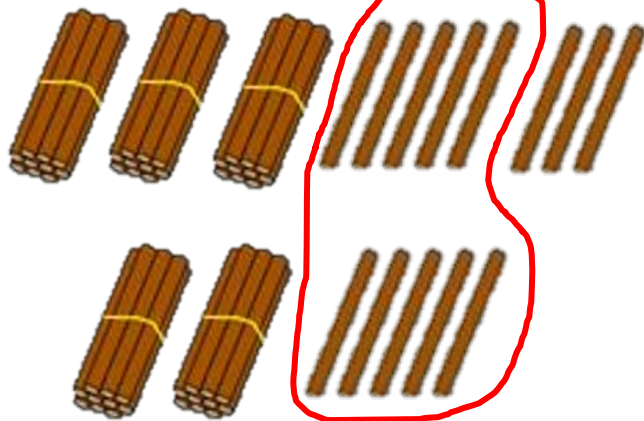
數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

$$38 + 25 = (\quad)$$

如何透過同構，幫助學生學習加法直式算則

具體



半具體

⑩

⑩ ⑩ ⑩ ① ① ① ① ①
① ① ①

⑩ ⑩ ① ① ① ① ①

形式

⑩ ①

3 8

+ 2 5

+ 13

1 3
+ 5

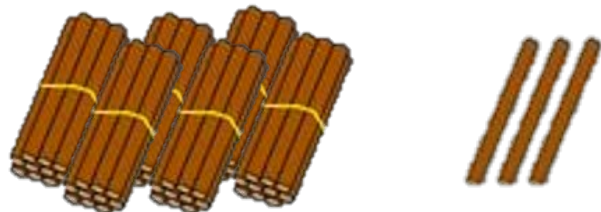
6 3

⑩ ①

3 8

+ 2 5

6 3



⑩ ⑩ ⑩ ① ① ①
⑩ ⑩ ⑩

數學脈絡及數學本質系列學習

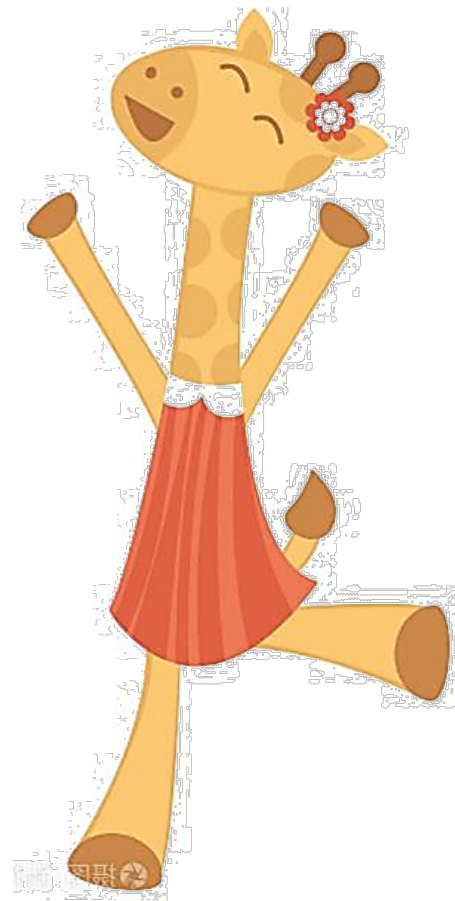
台南市國教輔導團數學領域

?

此兩題有沒有同構？

⑩	①
3	8
+2	5
<hr/>	
	13
+5	
<hr/>	
1	3
+5	
<hr/>	
6	3

時	分
3	40
+2	50
<hr/>	
	90
+5	
<hr/>	
1	30
+5	
<hr/>	
6	30



數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

⑩⑩	⑩	①	
4	5	6	
+3	7	8	
	14		→ 6個①加8個①是14個①
	12		→ 5個⑩加7個⑩是12個⑩
+7			
	1	4	→ 14個①是1個⑩4個①
	1	2	→ 12個⑩是1個百4個⑩
+7			
8	3	4	→ 8個百3個⑩4個①是834

日	時	分	
2	13	40	
+3	15	30	
		70	→ 40分加30分是70分
	28		→ 13時加15時是28時
+5			
	1	10	→ 70分是1時10分
	1	4	→ 28時是1日4時
+5			
6	5	10	→ 6日5時10分

同構概念運用的好，不管面積、時間、重量、體積.....等，都與整數加減一樣，全數都可以貫通。



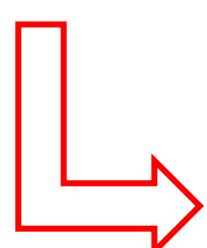
？ 下列做法，你是教左邊還是教右邊？

複名數的加、減

$$\begin{array}{r} \text{公尺} \quad \text{公分} \\ 3 \quad 5 \\ + 2 \quad 48 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{公尺} \quad \text{公分} \\ 3 \quad 05 \\ + 2 \quad 48 \\ \hline \end{array}$$

要不要補0？


$$\begin{array}{r} 3 \quad 0 \quad 5 \\ + 2 \quad 4 \quad 8 \\ \hline 5 \quad 5 \quad 3 \end{array}$$

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

公 尺	公 分	公 斤	公 克	小 時	分 鐘	億	萬
2	78	5	468	3	48	53	7685
+3	56	+3	875	+2	95	+9	6402
<hr/>		<hr/>		<hr/>		<hr/>	

這四題都和兩位數的加減，
符合同構的關係。

	⑩	①
	3	8
+	2	5
<hr/>		
	6	3

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

三位數加減

同構

公里	公尺	公分
5	85	50
+ 3	950	85
<hr/>		

100	10	1
4	5	6
+ 3	7	8
<hr/>		

一招走天涯

時	分	秒
5	35	50
+ 3	45	35
<hr/>		

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

為何國小加、減、乘、除都使用直式來記錄？

而國中以後都使用橫式來記錄？

「 $38 + 25 = (\quad)$ 」，請用橫式記記看：

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

「 $38 + 25 = (\quad)$ 」

直式是解決兩個單位記錄的問題

$$8 + 5 = 13$$

$$13 \div 10 = 1 \cdots 3$$

$$3 + 2 = 5$$

$$5 + 1 = 6$$

$$10 \times 6 = 60$$

$$60 + 3 = 63$$

$$8 + 5 = 13(\text{①})$$

$$13 \div 10 = 1(\text{⑩}) \cdots 3(\text{①})$$

$$3 + 2 = 5(\text{⑩})$$

$$5 + 1 = 6(\text{⑩})$$

$$10 \times 6 = 60(\text{①})$$

$$60 + 3 = 63(\text{①})$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 38 \\ + 25 \\ \hline 63 \end{array}$$

橫式每次只
寫1個單位

直式只適用於多單位的解題策略。

約定

直式記法的限制

- ① 一個位置只能記錄 1 個數碼(數字符號)。
- ② 某位值的個數是 0 時，必須記 0。
- ③ 記錄幾個十時，只能將幾記錄在十位，
記錄幾個一時，只能將幾記錄在個位。

$$\begin{array}{r} 3 \quad 2 \quad 4 \\ + 1 \quad 0 \quad 8 \\ \hline 4 \quad 2 \quad 12 \end{array}$$

脫離定位板

$$\begin{array}{r} 3 \quad 2 \quad 4 \\ + 1 \quad 0 \quad 8 \\ \hline 4 \quad 3 \quad 2 \end{array}$$

⑩ ①

3 8

3 8

3 8

$$\begin{array}{r} + 2 \quad 2 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 2 \quad 2 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 2 \quad 2 \\ \hline 6 \quad 0 \end{array}$$

加法與減法問題(題型)





哪種先教較好？

加法問題：

從頭數→往上數

添加型問題：

甲有 8 元，乙給甲 5 元後，甲有多少元？

併加型問題：

交換律

甲有 8 元，乙有 5 元，兩人合起來共有多少元？

減法問題：

拿走型問題：

甲有 8 元，給乙 5 元後，還剩下多少元？

不同單位的比較型問題：

8 個人，5 頂帽子，一人戴 1 頂帽子，

帽子多還是人多，多多少？

同單位的比較型問題：

甲有 8 元，乙有 5 元，兩個人相差多少元？

成人常提示，題目中有「共」或「合起來」，就可以使用加法來解題。

成人為什麼要提示關鍵字？

為何關鍵字對解題有幫助？

可以用其它的方式幫助學童嗎？

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

甲、乙、丙、丁、戊、己六人共有 1000 元，
甲和乙共有 500 元，丙和丁共有 300 元，
請問戊和己共有多少元？

用加法還是用減法？

現象(統計)學的觀點：

找出所有的課本、習作、參考書以及題庫光碟，
觀察這些用加法解題文字題的文字描述有那些
共同的特徵。

看到現象，只是知其然，但是不知其所以然。

數學模型的觀點：

有兩個已知個數的集合，這兩個集合沒有共同的元素，當要確定這兩個集合的個數合起來是多少時，就可以使用加法來替代點數解決問題。

加法問題的數學模型

$$A \cap B = \Phi,$$

$$n(A) = a, n(B) = b,$$

$$a + b = n(A \cup B)。$$

添加型問題：

甲有 8 元，乙給甲 5 元後，甲有多少元？

併加型問題：

甲有 8 元，乙有 5 元，兩人合起來共有多少元？



思考為什麼？

一瓶 20 公克重、溫度是 20 度的水，
一瓶 30 公克重、溫度是 30 度的水。
將兩瓶水倒在同一個瓶中。

請問：水重多少公克？

溫度是多少度？

- ① 為什麼水的重量可以相加？
- ② 為什麼水的溫度不能相加？

現在是 30 度，
溫度上升 20 度
後是多少度？

平均問題呢？

溫度為何有時
可以加，有時
不可以加？



思考：加法有什麼特徵？

- 只要是算個數，就是自然數的概念
- 只要是算集合的個數，就**滿足加法模型**

一瓶 20 公克重、溫度是 20 度的水，
一瓶 30 公克重、溫度是 30 度的水。

將兩瓶水倒在同一個瓶中。

請問：水重多少公克？

溫度是多少度？

20 克 → 20 個 1 克

20 度 C → 20 個 1 度 C?

0 度 C → ?? (不滿足個數模型)

現在是 30 度，溫度上升 20 度
後是多少度？

此題是在計算
刻度的個數



加法問題：

添加型問題：

甲有 8 元，乙給甲 5 元後，甲有多少元？

併加型問題：

甲有 8 元，乙有 5 元，兩人合起來共有多少元？

解題方法相似。

減法問題：

拿走型問題：

甲有 8 元，給乙 5 元後，還剩下多少元？

不同單位的比較型問題：

8 個人，5 頂帽子，一人戴 1 頂帽子，

帽子多還是人多，多多少？

同單位的比較型問題：

甲有 8 元，乙有 5 元，兩個人相差多少元？

思考：是不是同單位才能相加減？

拿走型問題：

甲有 8 元，給乙 5 元後，還剩下多少元？

不同單位的比較型問題：

8 個人，5 頂帽子，一人戴 1 頂帽子，
帽子多還是人多，多多少？

同單位的比較型問題：

甲有 8 元，乙有 5 元，兩個人相差多少元？

拿走型和比較型解題方法差異很大。

①引入不同的記法：

②引入相同的記法，但算式的意義不同。

③引入相同的記法，且算式的意義相同。

拿走型問題：

甲有8元，給乙5元後，
還剩下多少元？

不同單位的比較型問題：

8個人，5頂帽子，一人戴1頂帽子，
帽子多還是人多，多多少？

$$8 - 5 = 3$$

篩選測驗通過率最低 5 題

「15 頂帽子分給 22 個人，一人分 1 頂，請問帽子夠不夠，多或少幾頂？」

請問下列算式和答案哪個正確？

(1) $22 - 15 = 7$ ，答：帽子不夠，少 7 頂。

(2) $15 + 22 = 37$ ，答：帽子夠，多 37 頂。

(3) $22 - 15 = 7$ ，答：帽子夠，多 7 頂。

(4) $15 - 22 = 7$ ，答：帽子不夠，少 7 頂。

學生選啥？



拿走型問題：

甲有 8 元，給乙 5 元後，還剩下多少元？

先引入拿走型問題，

使用 $8-5=3$ 記錄解題過程。



不同單位的比較型問題：

5 頂帽子，8 個人，一人戴 1 頂帽子，
帽子多還是人多，多多少？

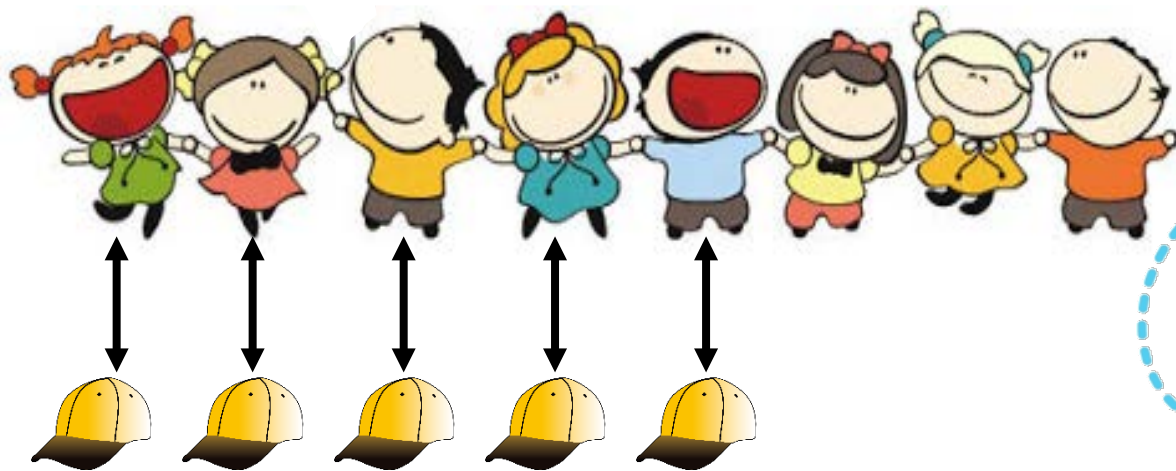
① 延伸拿走型的記法： $8-5=3$ 的意義
還是 8 個 **拿走** 5 個剩下 3 個。

② 發明新的記法： $8-5=3$ 指的是 8 個
和 5 個 **一對一對應** 後，剩下 3 個。

學生會記成 $5-8=3$ 。



5 頂帽子，8 個人，一人戴 1 頂帽子，
帽子多還是人多，多多少？



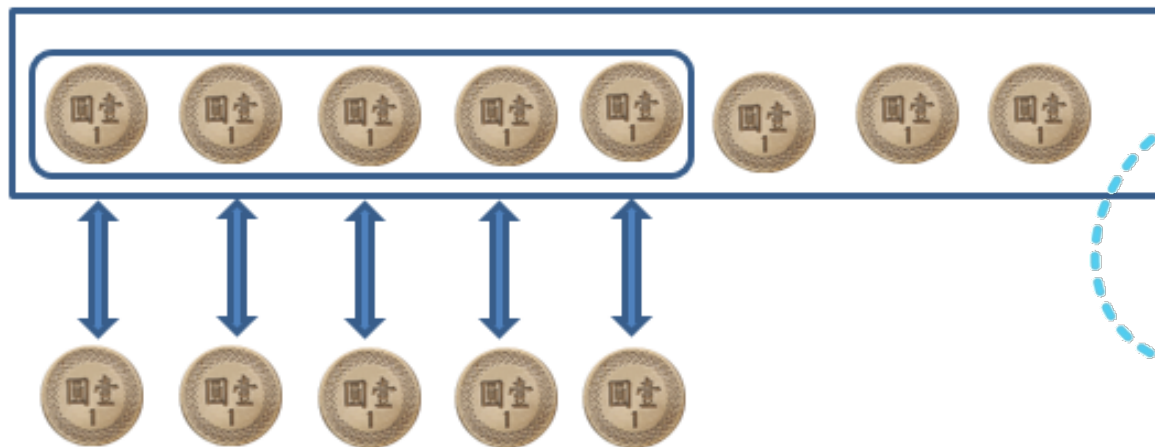
建議
先教不同單位



$8 - 5 = 3 \Rightarrow$ 8 個人，拿走 5 個戴帽子的人

同單位的比較型問題：

甲有 8 元，乙有 5 元，兩個人相差多少元？



建議
先教不同單位

$$\underline{8 - 5 = 3} \Rightarrow$$

從甲的8元中，拿走乙的5元，還剩多少？???



思考：

- 我們究竟是將“—”看成是
拿走？還是看成一一對應？
- 同樣是“—”，但意義可能
會不一樣。

案例：

- 甲有8元，給乙5元後，還剩下多少元？
- 甲有8元，乙有5元，兩個人相差多少元？

案例：

- 8個人，5頂帽子，一人戴1頂帽子，帽子多還是人多，多多少？

不可以說“同單位才能相加減”

加減互逆



數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

❓ 此題是加法問題，還是減法問題？

甲有 95 元，乙給甲多少元後甲會有 218 元？

有拿走嗎？



有比較嗎？

追加型問題： → 用加法往上數...太難

甲有 95 元，乙給甲多少元後甲會有 218 元？

本題是加法問題或是減法問題？

不適合
一年級

成人觀點：用減法解題比較有效率

學童觀點：加法的語意用加法來解題

描述像
加法

選測驗通過率最低 5 題

小文和小青共有12顆彈珠，其中7顆是小青的，
小文有幾顆彈珠？

(1)4 顆 (2)5 顆 (3)6 顆 (4)19 顆

本題的語意是加法問題或是減法問題？

為何學生的通過率很低？

學生解讀為加法問題，但老師用減法來教??

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

哪一種較難？

$$(\quad) + 3 = 8$$

$$5 + (\quad) = 8$$

$$(\quad) - 5 = 3$$

$$8 - (\quad) = 3$$

加減互逆改到
二年級才教

用減法
來算

透過加減互逆，利用加、減法解決
被加(減)數及加(減)數未知問題。



有 2 種溝通加減互逆的方法：

① 文字題的情境

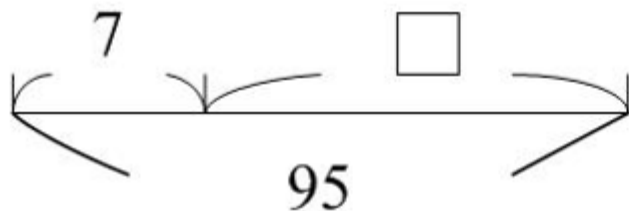
② 線段圖

線段是溝
通關係用

數線是指
座標

TASA 縣市學力檢測(四年級)

下圖中，哪個算式是正確的？



(1) $\square - 7 = 95$

(2) $\square + 7 = 95$

(3) $95 + 7 = \square$

(4) $\square - 95 = 7$

測試

一般生



數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

選項率	.08	.77	.08	.07	.00
高分組	.01	.98	.00	.01	.00
低分組	.17	.43	.23	.16	.01

難度：0.70

鑑別度：0.55



如何從文字情境中
來學習加減互逆？



數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

情境：A dashed purple rectangular box contains 8 circles. The first 5 circles are black, and the last 3 are red.

盒子中有5個黑球3個紅球。

5個黑球和3個紅球合起來有8個球，
可以記成 $5+3=8$ 。

8個球拿走5個黑球後剩下3個紅球，
可以記成 $8-5=3$ 。

8個球拿走3個紅球後剩下5個黑球，
可以記成 $8-3=5$ 。

自

由

轉

換

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

情境：

5個加()個是8個。

$$5 + () = 8$$

8個拿走5個剩()個。

$$8 - 5 = ()$$

面對 $5 + () = 8$ 的問題

⇒ 利用 $8 - 5 = ()$ 來解題

面對 $() - 3 = 5$ 的問題

⇒ 利用 $5 + 3 = ()$ 來解題

如何從線段圖來學習

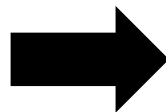
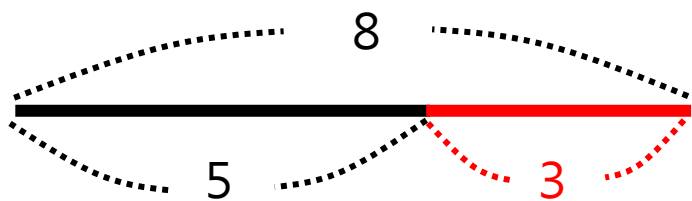
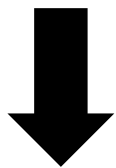
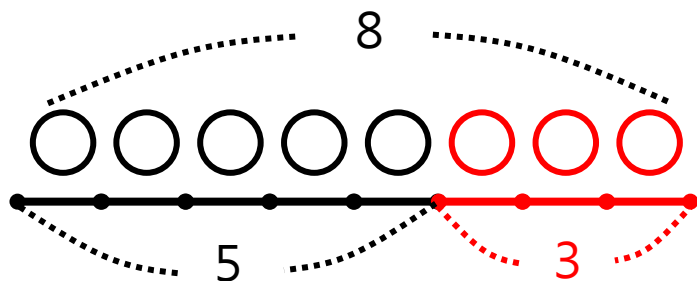
加減互逆？



數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

情境：盒中有5個黑球和3個紅球

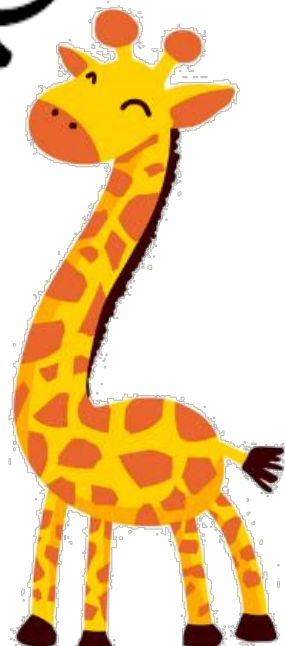


$$5 + 3 = 8$$

$$8 - 5 = 3$$

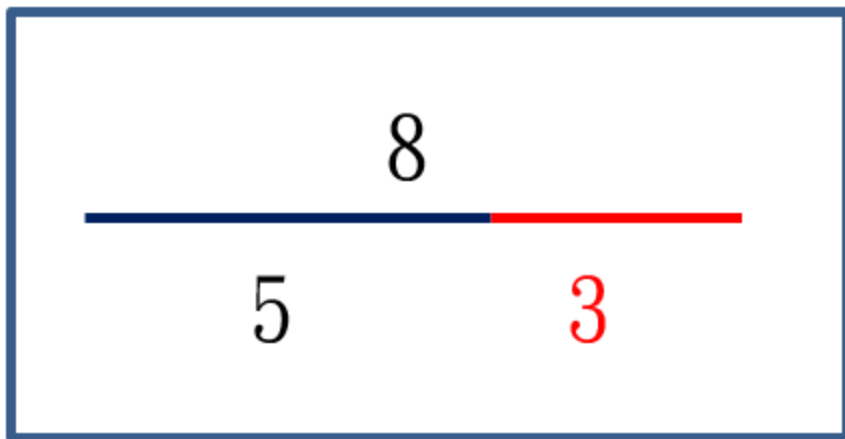
$$8 - 3 = 5$$

將情境改記成
線段圖



數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域



與線段圖的
意思一樣

都能同時看到：

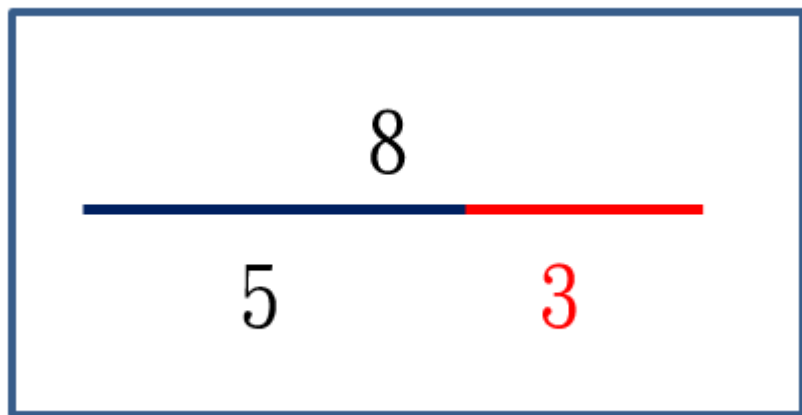
$$5 + 3 = 8 ; 8 - 3 = 5 ; 8 - 5 = 3$$





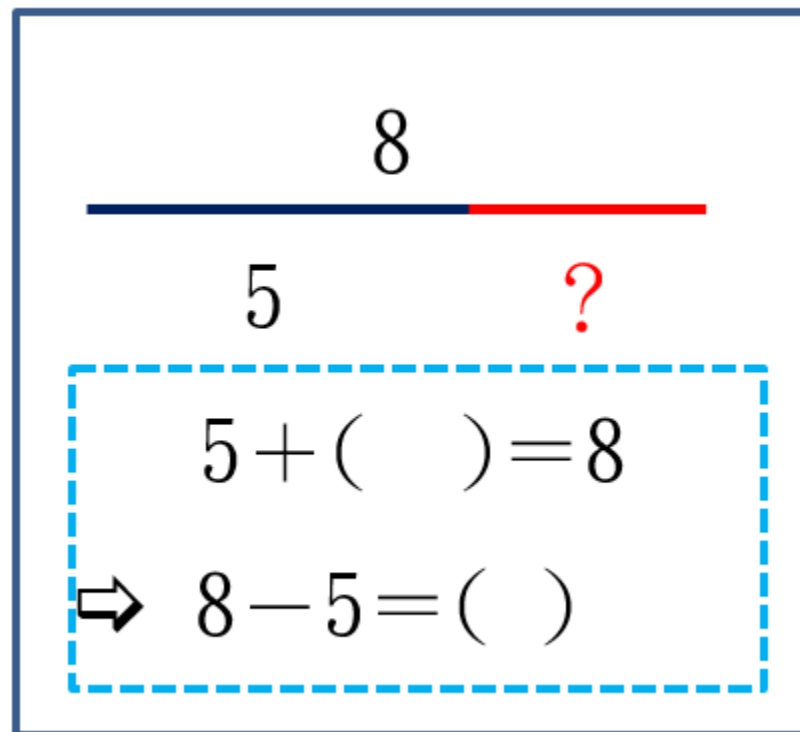
課本是呈現哪個圖？

完整的記法



$$\left\{ \begin{array}{l} 5 + 3 = 8 \\ 8 - 5 = 3 \\ 8 - 3 = 5 \end{array} \right.$$

省略的記法



同一集合的關係

加減互逆建立在部份-全體的情境

添加型

拿走型問題是部份-全體情境

併加型

比較型問題不是部份-全體情境

?

下列哪一題比較困難？

基準量已知、比較量未知的比較型問題

甲有 5 元，乙比甲多 2 元，乙有多少元？

甲、乙兩人的錢是不同集合，無法用加減互逆來教

比較量已知、基準量未知的比較型問題

丙有 5 元，丙比丁多 2 元，丁有多少元？

?

誰是基準量？

數學習慣把後項
當基準量

基準量已知、比較量未知的比較型問題

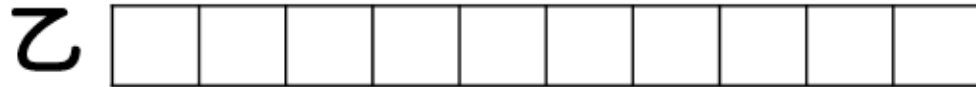
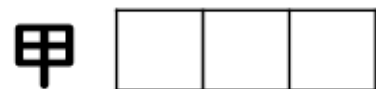
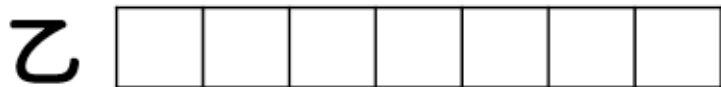
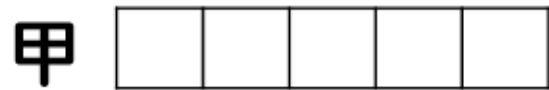
甲有 5 元，乙比甲多 2 元，乙有多少元？

比較量已知、基準量未知的比較型問題

丙有 5 元，丙比丁多 2 元，丁有多少元？

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域



讓學生看到現象

乙比甲多2元，
所以，甲比乙少2元。
難嗎？



至少要舉三個例子，學生才能轉換。

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

甲有5元，乙比甲多2元，乙有多少元？



比較型問題要
讓學生看到一
一對應



先畫出跟甲一樣多的5元，再畫出多出的2個。

數學脈絡及數學本質系列學習

台南市國教輔導團數學領域

丙有 5 元，丙比丁多 2 元，丁有多少元？

丙 ○○○○○○
丁 無法畫出少 2 元

丙 ○○○○○○
丁



先畫出跟丙一樣多的5元，再畫出多出的2個。

❖ 謝謝聆聽



0127東區復興-上午