

數學公式 (一~四)

1. 有理數

↳ $\frac{a}{b}$, 有限、循環小數, $b \neq 0$

2. 循環小數

↳ (1) $0.\overline{ab} = \frac{ab}{99}$

(2) $0.\overline{abc} = \frac{abc-a}{990}$

(3) $a.\overline{bcd} = \frac{abcd-ab}{990}$

3. 乘法公式

↳ 1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

2. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

3. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

4. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

4. 根式

↳ a, b : 有理數, \sqrt{c} : 無理數
 $\Rightarrow a + b\sqrt{c} = 0 \Rightarrow a = b = 0$

5. 雙根號化簡

↳ 1. $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ $\Delta \sqrt{\text{必}} > 0$, 大的寫前面

2. $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

6. 算幾不等式

↳ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $a=b \Leftrightarrow "="$ 成立

7. 分點公式

↳ $\frac{na+mb}{m+n}$ $\xrightarrow{A(a) \quad m \quad : \quad c \quad n \quad B(b)}$

8. 絕對值的一次方程式 & 不等式

↳ (1) $|x| = k$, $x = k$ 或 $x = -k$

(2) $|x| \leq k$, $-k \leq x \leq k$

(3) $|x| \geq k$, $x \geq k$ 或 $x \leq -k$

9. 三角不等式

↳ $|a| + |b| \geq |a+b|$, $ab \geq 0 \Leftrightarrow "="$ 成立

10. 一次函數

↳ ○ 斜直 或 水平線

× 鉛直線

$y = ax + b$ ($a \neq 0$)

11. 二次函數

↳ ○ 拋物線

頂點: $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$

對稱軸: $x + \frac{b}{2a} = 0$

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

$= a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$

開口大小與 x^2 係數 a 有關,
和 $|a|$ 成反比

令 $y = 0$, $ax^2 + bx + c = 0$

(1) $b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow$ 交 2 點, 有 2 相異實根
 $(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0)$

(2) $b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow$ 相切, 有 2 相等實根
 $(-\frac{b}{2a}, 0)$

(3) $b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow$ 不相交, 函數 $f(x)$

恆正 或 恆負, 有 2 相異共軛虛根

平移: $y - k = a(x - h)^2$

12. 單項函數

↳ $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ 偶函數, 對稱 y 軸

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ 奇函數, 對稱原點

偶函數: $y = ax^{(n)}$ \rightarrow 偶數

奇函數: $y = ax^{(n)}$ $\rightarrow n \geq 3$, 奇數

13. 餘式定理

$\hookrightarrow (1) (ax-b) \div f(x)$ 的餘式為 $f(\frac{b}{a})$, $a \neq 0$
 $(x-\frac{b}{a})$

14. 因式定理

$\hookrightarrow (1) ax-b$ 為 $f(x)$ 的因式 $\Leftrightarrow f(\frac{b}{a})=0$

15. 插值多項式

$\hookrightarrow (1)$ 牛頓法假設: $f(x) = A + B(x-a)$

(2) 拉格朗日法假設: $f(x) = A(x-a) + B(x-b)$

(3) 拉格朗日插值多項式:

$$f(x) = f(a) \frac{x-b}{a-b} + f(b) \frac{x-a}{b-a}$$

結定 2 點

(1) 牛頓法假設:

$$f(x) = A + B(x-a) + C(x-a)(x-b)$$

(2) 拉格朗日法假設:

$$f(x) = A(x-a)(x-b) + B(x-b)(x-c) + C(x-c)(x-a)$$

(3) 拉格朗日插值多項式:

$$f(x) = f(a) \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + f(b) \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + f(c) \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

結定 3 點

16. 一次因式檢驗法

\hookrightarrow 找有理根

17. 複數的定義

$\hookrightarrow \sqrt{-b} = \sqrt{b}i$, $b > 0$, $i^2 = -1$

$a+bi$ 實數 ($b=0$)

18. 複數的四則運算

$$\hookrightarrow \oplus (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

$$\ominus (a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$$

$$\otimes (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

$$\oslash \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

$$= \frac{\overset{\text{實部}}{ac+bd}}{c^2+d^2} + \frac{\overset{\text{虛部}}{bc-ad}}{c^2+d^2}i$$

$c+di \neq 0$, 分母有理化

19. i 的性質

$$\hookrightarrow \textcircled{1} i^{4n+1} = i$$

$$\textcircled{2} i^{4n+2} = i^2$$

$$\textcircled{3} i^{4n+3} = i^3 = -i$$

$$\textcircled{4} i^{4n} = i^4 = 1 (n \in \mathbb{Z})$$

20. 共軛複數

$$\hookrightarrow \overline{a+bi} = a-bi, \overline{a-bi} = a+bi$$

21. 根式的乘除

$$\hookrightarrow \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{ab} \\ -\sqrt{ab} \end{cases}, a < 0, b < 0$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{a}{b}} \\ -\sqrt{\frac{a}{b}} \end{cases}, a > 0, b < 0$$

22. 根與係數的關係

$\hookrightarrow (1) ax^2 + bx + c = 0$ 之二根為 α, β

$$\textcircled{1} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \textcircled{2} \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$(2) ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 之三根為 α, β, r

$$\textcircled{1} \alpha + \beta + r = -\frac{b}{a}$$

$$\textcircled{2} \alpha\beta + \beta r + r\alpha = -\frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta r = -\frac{d}{a}$$

23. 勘根定理

↳ 找實根

(1) $f(a) \cdot f(b) < 0$, $f(x) = 0$ 在 $a-b$ 間有奇數個實根

(2) $f(a) \cdot f(b) > 0$, $f(x) = 0$ 在 $a-b$ 可能無實根或偶數個實根

$\Delta y = f(x)$ 與 x 軸 ($y=0$) 的交點坐標即 $f(x) = 0$ 的根

24. 方程式之根成雙定理

↳ ① 虛根成雙

② 無理根成雙

25. 二次不等式

↳ (1) $(x-\alpha)(x-\beta) < 0 \Leftrightarrow \alpha < x < \beta$

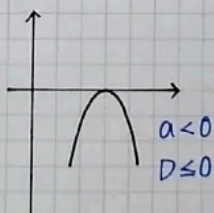
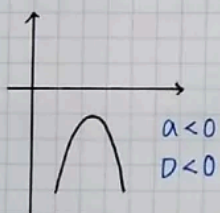
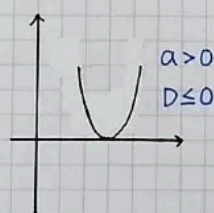
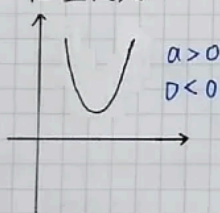
(2) $(x-\alpha)(x-\beta) \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq x \leq \beta$

(3) $(x-\alpha)(x-\beta) > 0 \Leftrightarrow x < \alpha \text{ 或 } x > \beta$

(4) $(x-\alpha)(x-\beta) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \alpha \text{ 或 } x \geq \beta$

$\Delta \alpha < \beta$

恒值問題：



$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$D = b^2 - 4ac$$

26. 高次不等式

↳ 領導係數為 \oplus

將 $a > 0$ 且 $D < 0$ 的恆正二次因式去掉，不影響不等式的解

27. 指數律

↳ ① $a^0 = 1$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$\textcircled{2} a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

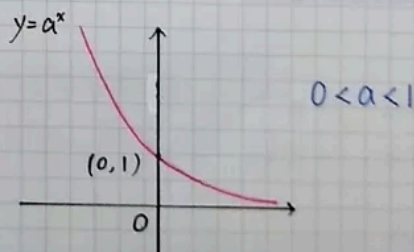
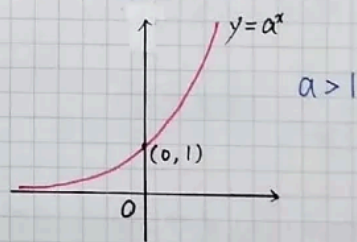
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

28. 指數函數的圖形



29. 對數

↳ $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$
↗ 真數
↓
對數

30. 對數的運算

$$\rightarrow \textcircled{1} \log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\textcircled{2} \log_a r \cdot s = \log_a r + \log_a s$$

$$\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$$

$$\log_a r^s = s \cdot \log_a r$$

$$\log_a r = \frac{1}{s} \log_a r^s$$

$$\log_a b^s = \log_a b$$

$$\log_a b^{\frac{1}{s}} = \frac{1}{s} \log_a b$$

③ 換底公式：

$$\log_a r = \frac{\log_b r}{\log_b a}, \quad b > 0, b \neq 1$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (\text{倒數關係})$$

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d = \log_a d \quad (\text{連鎖原理})$$

31. 指數、對數圖形的平移

$$\rightarrow y = a^x$$

$$\text{右移 } h \text{ 單位: } y = a^{x-h}$$

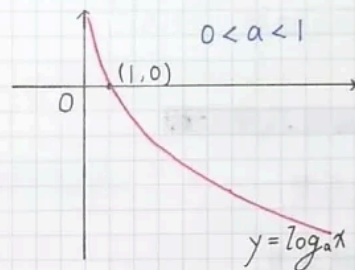
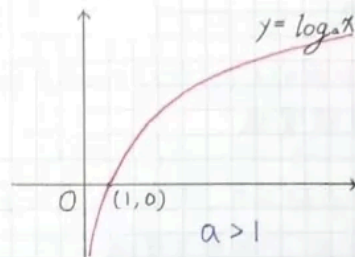
$$\text{上移 } k \text{ 單位: } y = a^x + k$$

$$y = \log_a x$$

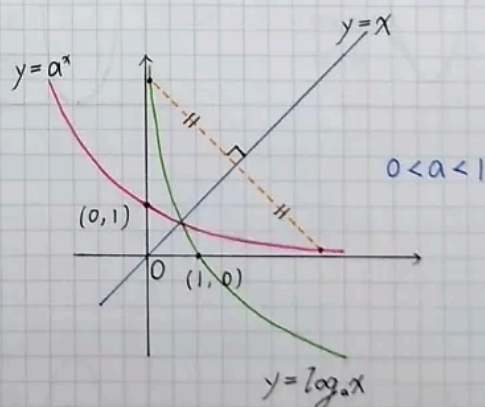
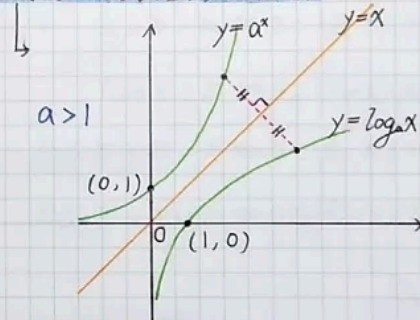
$$\text{右移 } h \text{ 單位: } y = \log_a (x-h)$$

$$\text{上移 } k \text{ 單位: } y = k + \log_a x$$

32. 對數函數的圖形



33. 指數、對數圖形的對稱



34. 對數查表

→ 可使用內插法求出對數的近似值

三角函數的性質及圖形

定義

正弦
 $\sin \theta = \frac{y}{r}$

餘弦
 $\cos \theta = \frac{x}{r}$

正切

$$\tan \theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$$

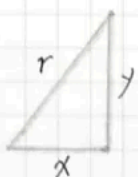
餘切
 $\cot \theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$

正割

$$\sec \theta = \frac{r}{x}, x \neq 0$$

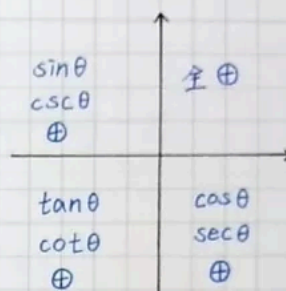
餘割

$$\csc \theta = \frac{r}{y}, y \neq 0$$



$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{y}{r} \\ \cos \theta &= \frac{x}{r} \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} \\ \cot \theta &= \frac{x}{y} \\ \sec \theta &= \frac{r}{x} \\ \csc \theta &= \frac{r}{y}\end{aligned}$$

△ 倒數



$$\sin \theta \cdot \csc \theta = 1$$

$$\cos \theta \cdot \sec \theta = 1$$

$$\tan \theta \cdot \cot \theta = 1$$

倒數關係式

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

商數關係式

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

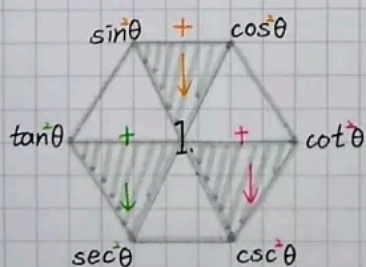
$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

平方關係式

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$



$$\Delta -1 \leq \sin \theta \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1$$

$$\sec \theta \leq -1, \sec \theta \geq 1$$

$$\csc \theta \leq -1, \csc \theta \geq 1$$

35. 指數・對數不等式

① $a > 1$

$$x > y \Leftrightarrow a^x > a^y$$

$$x > y > 0 \Leftrightarrow \log_a x > \log_a y$$

② $0 < a < 1$

$$x > y \Leftrightarrow a^x < a^y$$

$$x > y > 0 \Leftrightarrow \log_a x < \log_a y$$

36. 前・尾數

① $\log k = \text{整數 } n + \text{非負純小數 } r, r = \log a, bc \dots$

(a 為 $1 \sim 9$ 的整數)

② $n \geq 0$, k 的整數部分: $(n+1)$,

最高位數字: a

③ $n < 0$, k 從小數點後第 $(-n)$ 位始不為 0

$\Rightarrow a$

37. 等差數列 & 級數

① $d = a_2 - a_1 = a_n - a_{n-1}$

② 第 n 項: $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\text{③ 前 } n \text{ 項之和: } S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \\ = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

38. 等比數列 & 級數

① $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$

② 第 n 項: $a_n = a_1 r^{n-1}$

$$\text{③ 前 } n \text{ 項之和: } S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \begin{cases} \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, & r \neq 1 \\ na_1, & r = 1 \end{cases}$$

39. 等差中項 & 等比中項

① 等差中項: $b = \frac{a+c}{2}$

② 等比中項: $b^2 = ac \Rightarrow b = \pm \sqrt{ac}$

40. 複利問題

① 複利的本利和 = 本金 $\times (1 + \text{期利率})^{\text{期數}}$

41. 遞迴關係式

① 等差型: $\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + d, n \geq 2 \end{cases}$

等比型: $\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} \cdot r, n \geq 2 \end{cases}$

累加型: $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + f(n), n \geq 1 \end{cases}$

累乘型: $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot f(n), n \geq 1 \end{cases}$

42. 數學歸納法

① 當 $n=1$, 驗證 $P(1)$ 成立

② 設 $n=k$, $P(k)$ 成立, 再根據假設, 推得 $n=k+1$ 時, $P(k+1)$ 得證

43. 前 n 項和 S_n

① $\begin{cases} a_1 = S_1 \\ a_n = S_n - S_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$

44. 分項抵消法

① $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$

② $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$

③ $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$

80. 三角函数的基本關係

① 平方關係式: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

② 商數關係式: $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

③ 餘角關係式: $\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta)$

$\cos\theta = \sin(90^\circ - \theta)$

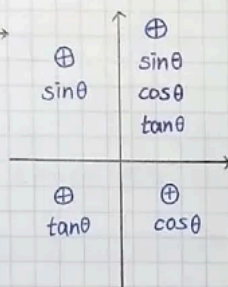
81. 標準位置角

→ 有向角: 逆時針旋轉 \Rightarrow 正角

順時針旋轉 \Rightarrow 負角

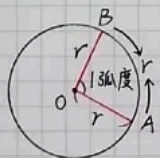
同界角: 有相同始邊 & 終邊

82. 度義角三角函數



	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0	1	0
90°	1	0	
180°	0	-1	0
270°	-1	0	

83. 角度 & 弧度



• π 弧度 $= 180^\circ \approx 3.14$

• 1 弧度 $= \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.3^\circ$

• $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ 弧度 ≈ 0.01745 弧度

• $s = r\theta$ 弧長 = 半徑 \cdot 圓心角弧度數

• 半圓弧長 $= \pi r$

• 圓心角 $= \frac{\pi r}{r} = \pi$ 弧度

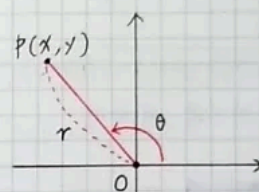
84. 常見的角度換算表

角度量	0°	30°	45°	60°	90°
弧度量	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

角度量	120°	135°	150°	180°	
弧度量	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	

85. 極座標

$\{r, \theta\}$
↓ ↓
距離 角度



$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{y}{r} \\ \cos\theta = \frac{x}{r} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

86. 三角函數角度變換

① 角度值為 $-\theta$, $180^\circ \pm \theta$:

• $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

• $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$, $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$

$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$

• $\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta$, $\cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta$

$\tan(180^\circ + \theta) = \tan\theta$

② 角度值為 $90^\circ \pm \theta$, $270^\circ \pm \theta$:

• $\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$, $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$

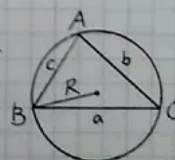
• $\sin(270^\circ + \theta) = -\cos\theta$, $\sin(270^\circ - \theta) = -\cos\theta$

• $\cos(270^\circ + \theta) = \sin\theta$, $\cos(270^\circ - \theta) = \sin\theta$

87. 正弦定理

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

△使用時機: 1. 給二角
2. 給對角 & 對邊



45. Σ 的性質 & 求和公式

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\sum_{k=1}^n (c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=1}^n a_k, \quad c \text{ 為常數}$$

$$\textcircled{3} \sum_{k=1}^n c = nc$$

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

46. 元素 & 集合

$\textcircled{1} S \subset T$ 且 $S \overset{\text{開口朝大的}}{\supset} T$, 則 $S = T$

$$\textcircled{2} \text{聯集: } S \cup T = \{x | x \in S \text{ 或 } x \in T\}$$

$$\textcircled{3} \text{交集: } S \cap T = \{x | x \in S \text{ 且 } x \in T\}$$

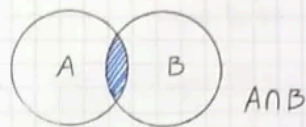
$$\textcircled{4} \text{差集: } S - T = \{x | x \in S, \text{ 但 } x \notin T\}$$

$\textcircled{5}$ 字集: 所有欲研究的集合 S 都是字集 U 的子集合

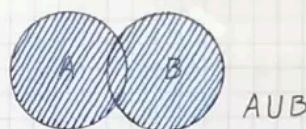
$\textcircled{6}$ 補集: 在 U 中不屬於 S 的元素組成的集合稱 S 的補集 $S' = \{x | x \in U, x \notin S\}$

47. 集合的運算

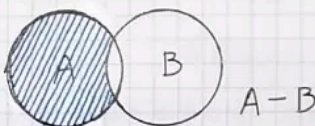
$$\textcircled{1} \text{交集: } A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$



$$\textcircled{2} \text{聯集: } A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$



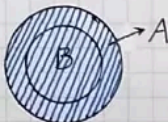
$$\textcircled{3} \text{差集: } A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$



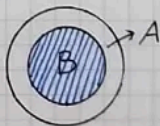
$$\textcircled{4} \text{互斥: } A \cap B = \emptyset$$



$$\textcircled{5} A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$$



$$\textcircled{6} A \cap B = B \Leftrightarrow B \subset A$$

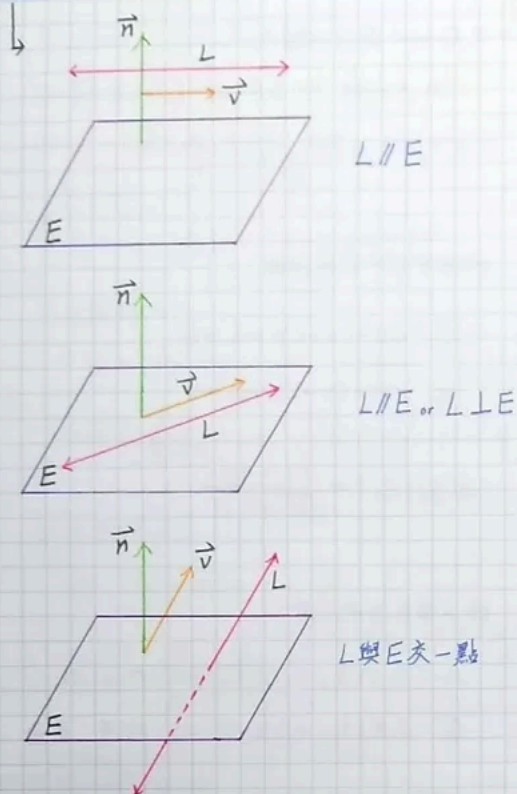


48. 取捨原理

$$\textcircled{1} n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - n(A \cap B) - n(B \cap C) \\ &\quad - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

143. 直線與平面關係



144. 對稱點與投影點

$\hookrightarrow A(x_0, y_0, z_0), E: ax+by+cz+d=0$
 ∇A 在 E 的投影點 $B(x_0-at, y_0-bt, z_0-ct)$
 $\textcircled{2} A$ 在 E 的對稱點 $A'(x_0-2at, y_0-2bt, z_0-2ct)$

$$t = \frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}$$

距離和最小:

$\nabla A, B$ 在 E 的反側 $\Rightarrow \overline{AB}$
 $\textcircled{2} A, B$ 在 E 的同側 $\Rightarrow \overline{AB}$

距離差最小:

$\nabla A, B$ 在 E 的同側 $\Rightarrow \overline{AB}$
 $\textcircled{2} A, B$ 在 E 的反側 $\Rightarrow \overline{A'B}$

145. 解三元一次方程組

$\hookrightarrow \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$

\Rightarrow 代入消去、加減消去

146. 矩陣

$\hookrightarrow m$ 列 n 行 $\Rightarrow m \times n$ 的矩陣

係數矩陣:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=p \\ a_2x+b_2y+c_2z=q \\ a_3x+b_3y+c_3z=s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

增廣矩陣:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=p \\ a_2x+b_2y+c_2z=q \\ a_3x+b_3y+c_3z=s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & p \\ a_2 & b_2 & c_2 & q \\ a_3 & b_3 & c_3 & s \end{bmatrix}$$

147. 矩陣列運算

- $\hookrightarrow \nabla$ 某二列互換
 $\textcircled{2}$ 某列乘一個不為 0 之數
 $\textcircled{3}$ 所得之積對應的加到另一列

148. 矩陣加減法與係數積

$\hookrightarrow A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{m \times n}$ 為同階矩陣

$$\nabla A+B = [a_{ij}+b_{ij}]_{m \times n}$$

$$\textcircled{2} A-B = [a_{ij}-b_{ij}]_{m \times n}$$

係數積:

$$rA = [ra_{ij}]_{m \times n}, r \in \mathbb{R}$$

補

Δ 前出列使出行

Δ 列使行直

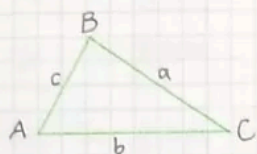
88. 三角形面積公式

① $\frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高}$

② $\frac{1}{2} ab \sin C$

$\frac{1}{2} ac \sin B$

$\frac{1}{2} bc \sin A$



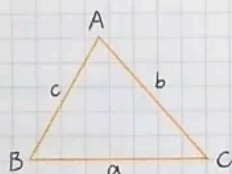
③ $\frac{abc}{4R}$ → 外接圓半徑

④ sr , $s = \frac{a+b+c}{2}$, r : 內切圓半徑

⑤ $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$
↑ 給三邊, 用海龍

89. 餘弦定理

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \end{cases}$$

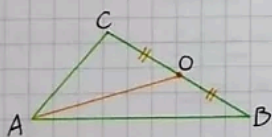


$$\begin{cases} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases}$$

△使用時機:
1. 給三邊
2. 給二邊一角

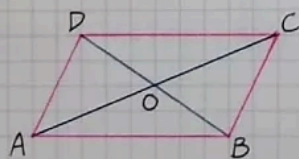
90. 中線定理

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \frac{1}{2} \overline{BC}^2 + 2\overline{AO}^2$



91. 平行四邊形定理

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$



92. 和角公式

	$\alpha + \beta$	$\alpha - \beta$
sin	$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$	$\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
cos	$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$	$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
tan	$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$	$\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

93. 倍角及半角公式

二倍角公式:

$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$

$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$

$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$

三倍角公式:

$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$ 口訣: 33-43

$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$

半角公式:

$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$

$\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$

$\tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$

94. 斜率應用

① $L_1 \parallel L_2 \rightarrow m_1 = m_2$ (斜率)

② $L_1 \perp L_2 \rightarrow m_1 \times m_2 = -1$

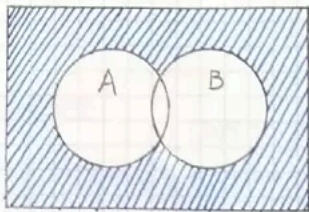
95. 平行線 & 垂直線之方程式

① 平行直線: $ax + by + k = 0$

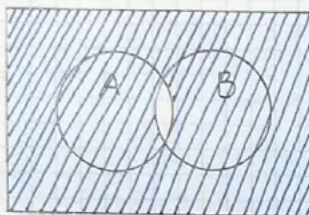
② 垂直直線: $bx - ay + k = 0$

49. 笛卡爾定律

① $A' \cap B' = (A \cup B)'$



② $A' \cup B' = (A \cap B)'$



50. 加法原理

→ 方法數為分類相加

51. 乘法原理

→ 每步驟的方法數相乘

52. 完全相異物的直線排列

① 直線排列：

- n 件相異物直線排列 = $n!$
- 從 n 件相異物中取 r 件直線排列 =

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

② 相鄰：先綁後自排

不可相鄰：先排其他，再插空隙

至少有一：(任意) - (沒有)

53. 有相同物的直線排列

→ n 件物品， k 種不同種類，第一類有 m_1 件...

$$\frac{n!}{m_1! m_2! \cdots m_k!}$$

54. 限制排列

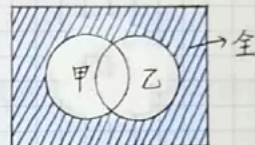
① n 人中 1 人受限：

$$n! - (n-1)!$$



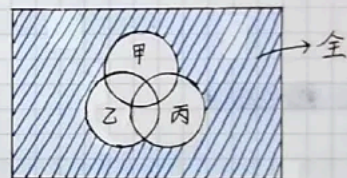
② n 人中 2 人受限：

$$n! - 2 \cdot (n-1)! + (n-2)!$$



③ n 人之中 3 人受限：

$$n! - 3 \cdot (n-1)! + 3 \cdot (n-2)! - (n-3)!$$



55. 重複排列

→ 從 n 種相異物，選 m 個排一列，可重複使用：
 n^m

56. 組合

→ 自 n 個相異物中，每次不可重複取 m 個為一組，
不排列 = C_m^n

$$C_m^n = \frac{P_m^n}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$C_n^n = 1$$

$$C_0^n = 1$$

57. 有相同物的部分取法

→ 組合數：

確定「幾同幾異」，再選取

排列數：

先選，再依「幾同幾異」排列

作法相反

149. 矩陣乘法

→ $A: m \times n, B: n \times p, C: m \times p$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$AB=C$ 指對每組 $(i, j), i=1, 2, 3, \dots, m$
 $j=1, 2, 3, \dots, p$

都有 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$

乘法性質:

① ~~交換~~ AB 不恆等於 BA

② 可結合 $(AB)C = A(BC)$ Δ 順序不能換

③ $r(AB) = (rA)B = A(rB)$

④ $A(B+C) = AB+AC$

⑤ 存在 $A \neq 0, B \neq 0$ 但 $AB=0$ 之矩陣

ex: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

150. 方陣的次方

→ 指數律:

$$A^m A^n = A^{m+n}, (A^m)^n = A^{mn}$$

二項式定理:

A, B 為 k 階方陣, I 為同階單位方陣,

若 $A = I + B \Rightarrow$

$$A^n = (I+B)^n = C_0^n I + C_1^n B + C_2^n B^2 + \dots + C_n^n B^n$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}, n \text{ 為自然數}$$

151. 二階反方陣

$$\rightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \det(A) = ad - bc \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

若 $\det(A) = 0, A^{-1}$ 不存在

$AX=B$, 若 A^{-1} 存在, $X=A^{-1}B$

152. 轉移矩陣

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \Delta \text{ 一定要方陣}$$

- ① A 的每一個元都是 ≥ 0 的實數
- ② A 中每一行各元之和都 = 1

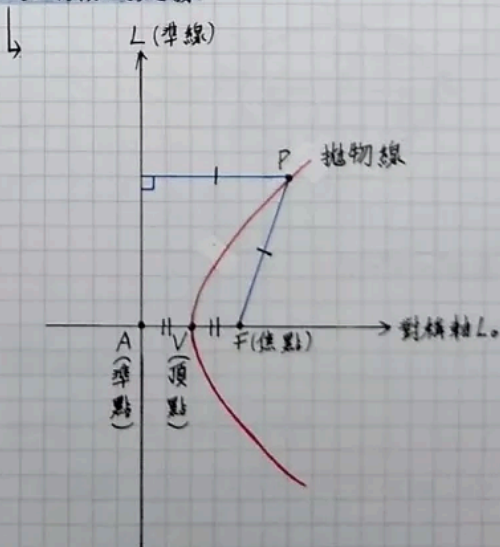
馬可夫定理:

$$\varnothing X = AX$$

↳ 穩定狀態

② X 各元的和為 1

153. 拋物線的定義



96. 直線方程式

標準式: $ax+by+c=0, a^2+b^2 \neq 0$

點斜式: L 過點 (x_0, y_0) , 斜率為 m ,

$$L: y - y_0 = m(x - x_0)$$

兩點式: L 斜率為 m , y 軸截距為 b ,

$$y = mx + b$$

截距式: x 軸截距為 a , y 軸截距為 b ,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, ab \neq 0$$

97. 兩直線的關係

$L_1: a_1x + b_1y = c_1, L_2: a_2x + b_2y = c_2$

① $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow$ 交一點 Δ 不平行

② $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow$ 平行

③ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow$ 重合

98. 二元一次不等式

$ax + by + c \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$

\geq, \leq : 含邊界

99. 同側點及異側點

$L: ax + by + c = 0, P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$

$$(ax_1 + by_1 + c)(ax_2 + by_2 + c) \begin{cases} > 0, P, Q \text{ 在 } L \text{ 同側} \\ < 0, P, Q \text{ 在 } L \text{ 異側} \\ \geq 0, P, Q \text{ 在 } L \text{ 同側} \\ \leq 0, \overline{PQ} \text{ 與 } L \text{ 相交} \end{cases}$$

100. 找最佳解方法

平行線法:

利用 $L_k: ax + by = k$ 在可行解區平行移動, 使 $P = ax + by$ 為最大/小值

頂點法:

代入所有頂點, 即可找到 $P = ax + by$ 的最大/小值, 用於封閉區間

101. 線性規劃

① 整理資料, 依題意定 x, y

② 列不等式, 繪圖, 找可行解區域

③ 列目標函數

④ 用最佳解方法找最大/小值

102. 圓方程式

標準式: 圓心 (h, k) , 半徑 r ,

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

一般式: 圓心 $(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2}), r = \frac{1}{2}\sqrt{d^2 + e^2 - 4f}$

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$$

圓內 < 0 , 圓外 > 0

$$D = d^2 + e^2 - 4f \begin{cases} > 0, \text{圓} \\ = 0, \text{一點} \\ < 0, \times \end{cases}$$

直徑式: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 為直徑 2 端點

$$(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$$

103. 點及圓之關係

圓 $C: x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$

① P 在圓上, $x_0^2 + y_0^2 + dx_0 + ey_0 + f = 0$



② P 在圓外, $x_0^2 + y_0^2 + dx_0 + ey_0 + f > 0$



③ P 在圓內, $x_0^2 + y_0^2 + dx_0 + ey_0 + f < 0$



圓 $C: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, 圓心 $M(h, k), P(x_0, y_0)$

① P 在圓外, P 到 C 的最遠距離 $\overline{MP} + r$, 最近距離 $\overline{MP} - r$

② P 在圓內, P 到 C 的最遠距離 $\overline{MP} + r$, 最近距離 $r - \overline{MP}$

58. 分配 & 分堆

- 將 n 個相同物分組分堆：
先確認各堆數量，
if 再分人，數量相同視為同物，不同則反之

59. 重複組合

- n 種不同物件，選 m 個為一組，可重複選：
 $H_m^n = C_m^{n+m-1}$ ， m 可大於 n
- 先將至少得的物品給足，剩下的再重複組合分給 n 個人
- 方程式 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$ ，非負整數解： H_m^n
- 方程式 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$ ，正整數解： H_{m-n}^n

60. 排列 & 組合整理

- ① n 件不同物分 m 個不同箱子 \Leftrightarrow 重複排列， m^n 種
- ② n 件相同物分 m 個不同箱子 \Leftrightarrow 重複組合， H_m^n 種
- ③ n 件相同物分 m 個相同箱子 \Leftrightarrow 分堆
- ④ n 件不同物分 m 個相同箱子 \Leftrightarrow 分組組合(無組別)

61. 二項式定理

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \dots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + C_n^n y^n$$

- 展開式第 $r+1$ 項： $C_n^r x^{n-r} y^r$ ，共 $n+1$ 項
- 巴斯卡公式： $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$

62. 機率定義

- 樣本空間 S 有 n 個元素，出現機率相等
 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{k}{n}$ (k 元素)

63. 機率性質

- 不可能事件： $P(\emptyset) = 0$
- 必然事件： $P(S) = 1$
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- 餘事件： $P(A') = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 \downarrow
 $P(\emptyset)$
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$
- A, B 互斥 $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$
 $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

64. 條件機率

- 設 $P(B) > 0$
 $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$
- ① $P(\emptyset|C) = 0$
- ② $P(C|C) = 1$
- ③ $0 \leq P(A|C) \leq 1$
- ④ $P(A'|C) = 1 - P(A|C)$
- ⑤ $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$

65. 條件機率的乘法原理

- $P(A) > 0, P(B) > 0$
- $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
 \downarrow 交叉相乘
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

66. 貝氏定理

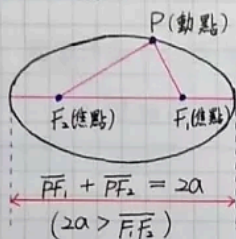
- 利用分割定理求條件機率

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(A') \cdot P(B|A')}$$

134. 拋物線方程式

方程式	$y^2 = 4cx$	$x^2 = 4cy$	$(y-k)^2 = 4c(x-h)$	$(x-h)^2 = 4c(y-k)$
頂點	$(0, 0)$	$(0, 0)$	(h, k)	(h, k)
焦點	$(c, 0)$	$(0, c)$	$(h+c, k)$	$(h, k+c)$
準線	$x = -c$	$y = -c$	$x = h-c$	$y = k-c$
對稱軸	$y = 0$	$x = 0$	$y = k$	$x = h$
正焦弦長	$4 c $	$4 c $	$4 c $	$4 c $
開口	$c > 0$ 右 $c < 0$ 左	$c > 0$ 上 $c < 0$ 下	$c > 0$ 右 $c < 0$ 左	$c > 0$ 上 $c < 0$ 下

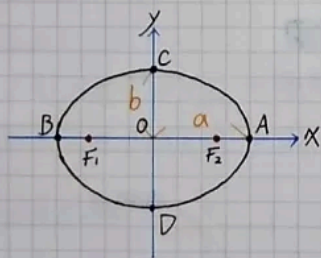
135. 橢圓的定義



① $2a > F_1F_2$, P 軌跡為橢圓

$2a = F_1F_2$, P 軌跡為 F_1F_2

$2a < F_1F_2$, P 軌跡不存在



② $a^2 = b^2 + c^2$

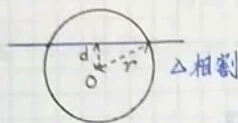
136. 橢圓方程式

方程式	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{p^2} + \frac{(y-k)^2}{q^2} = 1$
規定	$0 < b < a$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$p > q > 0$ $c = \sqrt{p^2 - q^2}$
中心	(h, k)	(h, k)
長軸	$y = k$	$x = h$
短軸	$x = h$	$y = k$
長軸長	$2a$	$2p$
短軸長	$2b$	$2q$
焦點	$(h+c, k)$ $(h-c, k)$	$(h, k+c)$ $(h, k-c)$
正焦弦長	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2q^2}{p}$

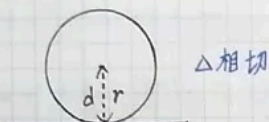
104. 直線與圓之關係

幾何法：半徑 r ，圓心到直線距離 d

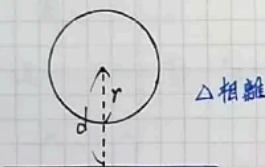
① $d < r$ ，交二點，交點距離 $= 2\sqrt{r^2 - d^2}$



② $d = r$ ，交一點



③ $d > r$ ，不相交



$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

代數法：L 代圓 C，得 $Ax^2 + Bx + C = 0$ ，

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

① 2 實數解 (不同)， $\Delta > 0$ ，兩交點

② 1 實數解， $\Delta = 0$ ，相切

③ 無實數解， $\Delta < 0$ ，不相交

105. 圓的切線

過圓 $C: x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ ， $P(x_0, y_0)$ ：

$$x_0x + y_0y + d \cdot \frac{x+x_0}{2} + e \cdot \frac{y+y_0}{2} + f = 0$$

• 過圓外一點 $P(x_0, y_0)$ ：

設 $y - y_0 = m(x - x_0)$ ，圓心到切線的距離 = 半徑，可求得 m

• 已知 m 的切線方程式：

設 $y = mx + b$ ，圓心到切線的距離 = 半徑，可求得 b

106. 切線段長

設 $P(x_0, y_0)$ 為圓 $C: x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ 外一點，

P 至圓 C 的切線段長：

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + dx_0 + ey_0 + f}$$

107. 向量

\vec{AB} 的長度： $|\vec{AB}|$ or $|\overline{AB}|$

兩點重合： $\vec{AB} = \vec{0}$

座標運算：

$$A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$$

$$\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2), \text{ 則 } |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

108. 向量加減法 & 係數積

加減法：

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB}$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

係數積：

① $\vec{a} \neq \vec{0}, r > 0$ ， $r\vec{a}$ 與 \vec{a} 同向

② $\vec{a} \neq \vec{0}, r < 0$ ， $r\vec{a}$ 與 \vec{a} 反向

坐標運算：

$$\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2), r \in \mathbb{R}:$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

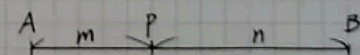
$$r\vec{a} = (rx_1, ry_1)$$

$$\textcircled{4} x_1 \cdot x_2 \cdot y_1 \cdot y_2 \neq 0, \text{ 則 } \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

109. 分點公式

P 在 \vec{AB} 上， $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{m}{n}$ ， O 為任意點，

$$\vec{OP} = \frac{n}{m+n} \vec{OA} + \frac{m}{m+n} \vec{OB}$$



67. 獨立事件

↳ 互斥事件

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

68. 平均數

↳ 算數平均數:

$$\mu = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

加權平均數:

$$\mu_{\text{加}} = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

幾何平均數:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

69. 中位數

↳ 正中間的數 or 中間兩數的平均數
(奇數個) (偶數個)

70. 眾數

↳ 一組資料中出現次數最多的

71. 標準差

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu^2}$$

變異數:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu^2$$

離均差 = $x_i - \mu$

每個數據皆相等: $\sigma = 0$

72. 一維數據的伸縮 & 平移

↳ 兩群資料 x, y 滿足 $y = ax + b$:

$$\mu_y = a\mu_x + b$$

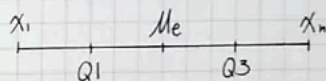
$$\text{中位數 } Me(y) = Me(ax + b) = a \times Me(x) + b$$

$$\text{眾數 } Mo(y) = Mo(ax + b) = a \times Mo(x) + b$$

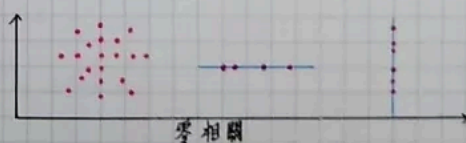
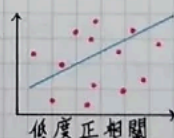
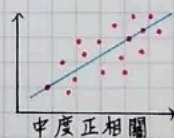
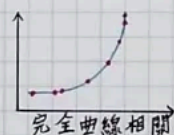
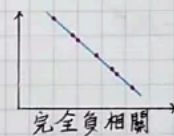
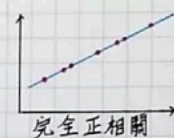
$$\text{全距 } R(y) = R(ax + b) = |a| \times R(x)$$

$$\text{標準差 } \sigma(y) = \sigma(ax + b) = |a| \times \sigma(x)$$

四分位差



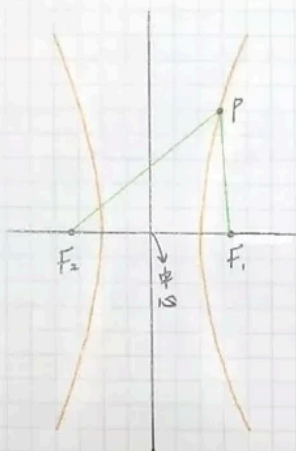
73. 二維數據散佈圖



157. 雙曲線的定義

→ $2a$ 為一定長, P 為動點, 滿足

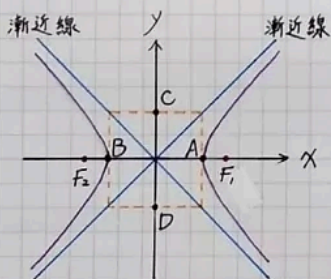
$$|PF_1 - PF_2| = 2a < F_1F_2 \text{ 的 } P \text{ 點軌跡}$$



① $0 < 2a < F_1F_2$, 滿足 $|PF_1 - PF_2| = 2a$ 之 P 點軌跡為雙曲線

$2a = F_1F_2$, 滿足 $|PF_1 - PF_2| = 2a$ 之 P 點軌跡為兩射線

$2a > F_1F_2$, 滿足 $|PF_1 - PF_2| = 2a$ 之 P 點軌跡不存在



① 兩焦點距離: $F_1F_2 = 2c$

實軸長 $AB = 2a$

共軛軸長 $CD = 2b$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

158. 雙曲線方程式

方程式	規定	中心	實軸	共軛軸	實軸長	共軛軸長	焦點	正焦弦長	漸近線
$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$a > 0, b > 0$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$	(h, k)	$x = h$	$y = k$	$2a$	$2b$	$(h+c, k)$ $(h-c, k)$	$\frac{2b^2}{a}$	$b(x-h) \pm a(y-k) = 0$
$\frac{(y-k)^2}{p^2} - \frac{(x-h)^2}{q^2} = 1$	$p > 0, q > 0$ $c = \sqrt{p^2 + q^2}$	(h, k)	$x = h$	$y = k$	$2p$	$2q$	$(h, k+c)$ $(h, k-c)$	$\frac{2q^2}{p}$	$p(x-h) \pm q(y-k) = 0$

159. 共焦點

→ 同中心, 可確定開口方向

① 橢圓: $\frac{x^2}{a^2-t} + \frac{y^2}{b^2-t} = 1, a^2-t > 0, b^2-t > 0$

② 雙曲線: $\frac{x^2}{a^2-t} - \frac{y^2}{b^2+t} = 1, a^2-t > 0, b^2+t > 0$

110. 三點共線

① A, B, P 三點共線, $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$,
 $\vec{AP} = t\vec{AB}$

② A, B, P 三點共線, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
 $\vec{OP} = \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB}, \alpha + \beta = 1$

111. 向量內積

$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2), \vec{a} \cdot \vec{b}$ 夾角 θ

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

性質:

$$\textcircled{1} \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$\textcircled{2} (a\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (a\vec{b}) = a(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\textcircled{3} \text{交換律: } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\textcircled{4} \text{分配律: } \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

~~結合律 消去律~~

⑤ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 是實數

112. 向量平行及垂直

$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$

$$\textcircled{1} \vec{a} \perp \vec{b}, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

$$\textcircled{2} \vec{a} \parallel \vec{b}, \vec{a} = r\vec{b} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}, r \in \mathbb{R}, b_1 b_2 \neq 0$$

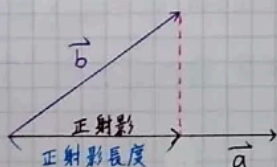
113. 正射影

\vec{b} 在 \vec{a} 上的正射影:

$$|\vec{b}| \times \cos \theta \times \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right) \vec{a}$$

\vec{b} 在 \vec{a} 上的正射影長度:

$$|\vec{b}| \times \cos \theta = |\vec{b}| \times \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}|}$$



114. 參數式

L 過 $P(x_0, y_0)$ 且 $L \parallel \vec{v} = (a, b)$:

$$L: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

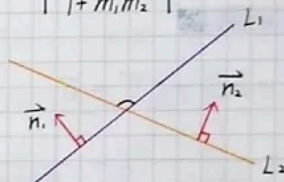
L 過 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$:

$$L: \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

115. 兩直線的交角

$$\cos \text{交角} = \pm \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

$$\tan \text{交角} = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$



116. 點到直線的距離

點線距離公式:

$$P(x_0, y_0), L: ax + by + c = 0$$

$$d(P, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

平行線距離公式:

$$\begin{cases} L_1: ax + by + c_1 = 0 \\ L_2: ax + by + c_2 = 0 \end{cases}$$

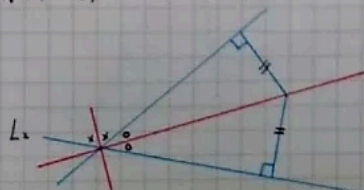
$$d(L_1, L_2) = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

117. 兩直線交角平分線

$$L_1: a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, L_2: a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

$$\frac{|a_1 x + b_1 y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2 x + b_2 y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

$$\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$



74. 相關係數

→ 測量兩變數間的直線相關程度大小

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \mu_y)^2}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \cdot \mu_x \cdot \mu_y}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \mu_x^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \mu_y^2}}$$

$$\cdot -1 \leq r \leq 1$$

75. 迴歸直線

→ $L: y - \overset{\text{算數平均數}}{\mu_y} = m(x - \mu_x)$

$$m = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \mu_x \cdot \mu_y}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \mu_x^2}$$

· 必過 (μ_x, μ_y)

· 斜率 & r 的正負符號相同

76. 二維數據的平移 & 伸縮

→ $r(ax+b, cy+d) = \begin{cases} r(x, y), & ac > 0, \text{同號} \\ -r(x, y), & ac < 0, \text{異號} \end{cases}$

77. 資料標準化

→ $\frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x} = z_i$ → 得到一組新數據

→ $\mu_z = 0, \sigma_z = 1$

· 線性變換

· $\mu_z = \mu_y = 0, \sigma_z = \sigma_y = 1$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{x}_i - \mu_{\hat{x}})(\hat{y}_i - \mu_{\hat{y}})}{n \cdot \sigma_{\hat{x}} \cdot \sigma_{\hat{y}}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{x}_i - 0)(\hat{y}_i - 0)}{n \cdot 1 \cdot 1}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{x}_i \hat{y}_i$$

· $m = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = r$

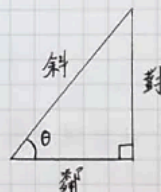
· 恆過定點 $(0, 0)$, $m = r$

78. 銳角三角函數

→ $\sin \theta = \frac{\text{對}}{\text{斜}}$

$\cos \theta = \frac{\text{鄰}}{\text{斜}}$

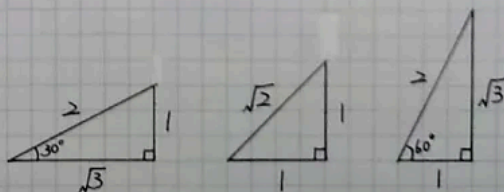
$\tan \theta = \frac{\text{對}}{\text{鄰}}$



79. 特別角三角函數

→

角度 \ 函數	sin	cos	tan
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$



160. 漸近線

① 求法：將標準式之常數項改0

② 左右雙曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的兩漸近線為
 $\underline{bx \pm ay = 0}$

③ 上下雙曲線 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ 的兩漸近線為
 $\underline{by \pm ax = 0}$

④ 兩漸近線 $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$,

方程式： $(a_1x + b_1y - c_1)(a_2x + b_2y - c_2) = k$, $k \neq 0$

161. 等軸雙曲線

↳ $a = b$

漸近線互相垂直

162. 共軛雙曲線

↳ 有相同中心， Γ_1 之共軛軸為 Γ_2 之實軸， Γ_1 之實軸為 Γ_2 之共軛軸

163. 圖形的平移及伸縮

↳ 平移： (x, y) 平移到 (x', y')

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x + h \\ y' = y + k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - h \\ y = y' - k \end{cases}$$

伸縮： $(0, 0)$ 為中心，將 (x, y) 水平伸縮 r 倍，

鉛垂伸縮 s 倍，得 (x', y')

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = rx \\ y' = sy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x'}{r} \\ y = \frac{y'}{s} \end{cases}$$

118. 三角形重心公式

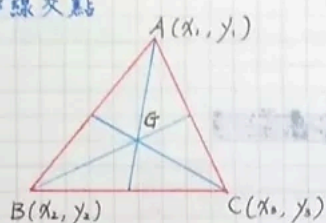
$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

平面上任一點

$$G \text{ 坐標} = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

△3 中線交點



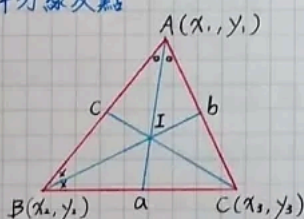
119. 三角形內心公式

$$a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$$

$$\vec{OI} = \frac{a}{a+b+c}\vec{OA} + \frac{b}{a+b+c}\vec{OB} + \frac{c}{a+b+c}\vec{OC}$$

$$I \text{ 坐標} = \left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c} \right)$$

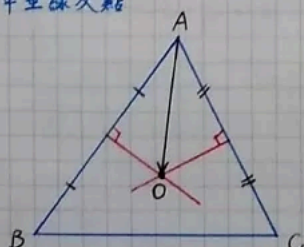
△3 角平分線交點



120. 三角形外心公式

$$\begin{cases} \vec{AO} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2}|\vec{AB}|^2 \\ \vec{AO} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}|\vec{AC}|^2 \end{cases}$$

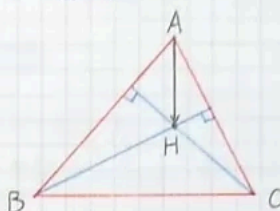
△3 中垂線交點



121. 三角形重心公式

$$\begin{cases} \vec{AH} \cdot \vec{AB} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} \\ \vec{AH} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} \end{cases}$$

△3 高交點



122. 二階行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

① 行列互換，行列式值不變

② 兩列/行對調，行列式值變號

③ 可提出同一倍數

④ 兩行/列各項成比例，行列式值=0

⑤ 若一行/列的各項均為兩項之和，可拆成兩行列式相加

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{vmatrix}$$

123. 面積公式

$$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$$

$$\text{面積} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \text{ or } \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\text{面積} = \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \text{ or } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

124. 二元一次方程組的解

△ ≠ 0, 恰有一解,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \Rightarrow \text{克拉克公式}$$

△ = 0 $\begin{cases} \text{無限多解 } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \text{ (重合)} \\ \text{無解 } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \text{ (平行)} \end{cases}$ (判斷係數)

補充

三次乘法公式

$$\rightarrow (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ &= (a-b)^3 + 3ab(a-b) \end{aligned}$$

斜率

$$\rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \theta$$

三角函數角度變換

$\rightarrow 180^\circ - 0^\circ$
 \rightarrow 水平轉換，正(弦)餘(弦)不變

$$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta$$

$$\sin(180^\circ - \theta) = +\sin \theta$$

$$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

$\rightarrow 90^\circ - 270^\circ$
鉛直轉換，正餘互換

$$\sin(90^\circ + \theta) = +\cos \theta$$

$$\sin(270^\circ + \theta) = -\cos \theta$$

$$\cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(270^\circ + \theta) = +\sin \theta$$

$\sin +$	$\sin +$
$\cos -$	$\cos +$
$\tan -$	$\tan +$
$\sin -$	$\sin -$
$\cos -$	$\cos +$
$\tan +$	$\tan -$

$$\Delta (x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

求極值使用時機

\rightarrow 算幾不等式：加、乘 & 倒數關係

柯西不等式：平方的相加

配方法/判別式：變數只有一個，且最高次數二次

微分：題目只給久，長很怪

125. 二元一次聯立方程組

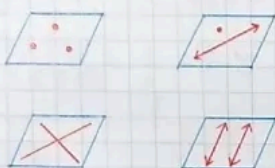
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases}$$

$$\text{異於}(0,0)\text{之解} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

126. 空間中的點、線、面關係

△請發揮想像力、想像力跟想像力

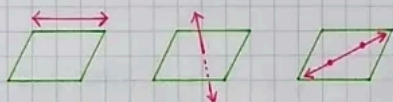
① 不共線三點、相交二相異線、
一線及線外一點、二平行線 } 決定平面條件



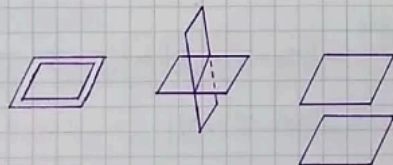
② 恰交於一點、平行、
歪斜、重合 } 二直線之關係



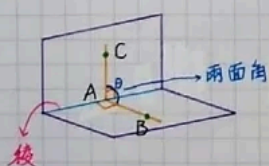
③ 平行、恰有一交點、面含線 } 線&面之關係
無限多解



④ 重合、交於一線、平行 } 面&面之關係



127. 二面角



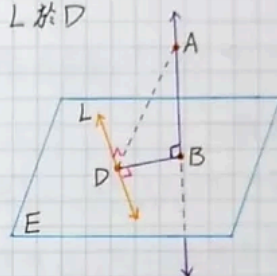
128. 三垂線定理

AB ⊥ 平面E於B

L為E上不過B之直線

BD ⊥ L於D

則AD ⊥ L於D



129. 柱體 & 錐體體積

① 柱體體積 = 底面積 × 高

② 錐體體積 = $\frac{1}{3}$ 底面積 × 高

130. 正四面體

棱長 a

$$\text{高} = \frac{\sqrt{6}a}{3}$$

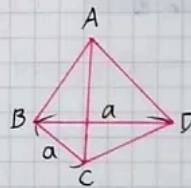
$$\text{體積} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

$$\text{內切球半徑} = \frac{1}{4} \times \text{高} = \frac{\sqrt{6}}{12} a$$

$$\text{外接球半徑} = \frac{3}{4} \times \text{高} = \frac{\sqrt{6}}{4} a$$

$$\text{歪斜兩棱間最短距離} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{3}$$



131. 空間坐標系

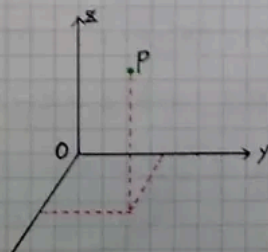
三坐標平面: xy平面, yz平面, zx平面

• $O(0,0,0)$, $P(a,b,c)$

$$\overline{OP} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

• $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$



132. 空間向量

$$\hookrightarrow \textcircled{1} A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\textcircled{2} \vec{a} = (a_1, a_2, a_3), |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\textcircled{3} \vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$$

④ 係數積:

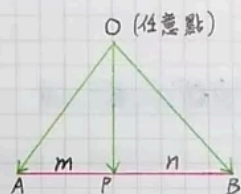
$$r\vec{a} = (rx, ry, rz), r \in \mathbb{R}$$

$r\overrightarrow{AB}$ 表示 $A(0), B(1)$, 終點為 r 的向量

⑤ 分點公式:

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB} = m:n$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n}$$



133. 空間向量的內積

$$\hookrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

性質:

$$\cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\cdot \text{夾角: } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\cdot \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

$$\cdot \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = t\vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = t$$

求長度:

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c})$$

134. 柯西不等式 \leftarrow 問最大 or 最小值

$$\hookrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$$

"=" 成立, $a:b:c = x:y:z$

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

135. 空間向量的外積

$$\hookrightarrow \vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\begin{pmatrix} |a_2 & a_3| & |a_3 & a_1| & |a_1 & a_2| \\ b_3 & b_1| & b_1 & b_2| & b_2 & b_3| \end{pmatrix} = \vec{a} \times \vec{b}$$

性質:

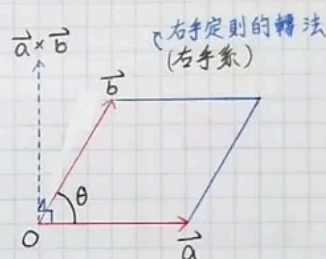
$$\textcircled{1} \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$\textcircled{2} \vec{a} \times \vec{b} \text{ 同時 } \perp \vec{a} \text{ 和 } \vec{b}$$

$$\textcircled{3} \vec{a} \text{ 和 } \vec{b} \text{ 平行時, } \vec{a} \times \vec{b} = 0 \text{ 向量}$$

$$\textcircled{4} \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$\textcircled{5} (a\vec{a}) \times \vec{b} = a(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (a\vec{b})$$



136. 面積 & 體積

$$\hookrightarrow \text{平行四邊形面積} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

$$= \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

$$\text{三角形面積} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

平行六面體體積

$$= |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}| = |(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}|$$

若 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共平面, $V=0$

四面體體積 = $\frac{1}{6}$ 平行六面體體積

137. 平面方程式

點法式:

過 $A(x_0, y_0, z_0)$, 法向量 $\vec{n} = (a, b, c)$:

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

一般式:

$$\vec{n} = (a, b, c):$$

$$\text{設 } ax + by + cz + d = 0$$

截距式:

一平面和 x, y, z 軸之交點為 $(a, 0, 0)$,

$(0, b, 0), (0, 0, c)$:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

平面族:

$$\text{過 } E_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ \&}$$

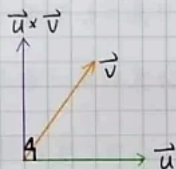
$$E_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \text{ 交線之平面:}$$

$$\text{設 } E_1 + kE_2 = 0$$

$$\Rightarrow (a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + k(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

平面法向量:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \text{ (外積)}$$



138. 兩平面的夾角

$$\hookrightarrow E_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ 和}$$

$$E_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \text{ 的夾角為 } \theta,$$

另一為 $180^\circ - \theta$

$$\cos \theta = \pm \frac{(a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2, b_2, c_2)}{|(a_1, b_1, c_1)| |(a_2, b_2, c_2)|}$$

$$= \pm \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$$\text{② 兩平面 } \perp: a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

$$\text{③ 兩平面 } \parallel: \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2} \text{ (分母 } \neq 0)$$

139. 點到平面的距離公式

點 P 到平面的距離:

$$P(x_0, y_0, z_0), \text{ 平面 } E: ax + by + cz + d = 0$$

$$d(P, E) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

② 兩平行平面的距離:

$$\begin{cases} E_1: ax + by + cz + d_1 = 0 \\ E_2: ax + by + cz + d_2 = 0 \end{cases}$$

$$d(E_1, E_2) = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \text{ (同法)}$$

③ 二面角之平分面:

$$E_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$E_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

140. 參數式

過點 (x_0, y_0, z_0) , 方向向量 (a, b, c) :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

過兩點 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$:

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

141. 對稱比例式

過 $P(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{v} = (a, b, c)$

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

142. 兩面式

$$\begin{cases} E_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ E_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$